



Ústav hydrogeologie, inženýrské geologie a užité geofyziky Karlova Univerzita, Praha

Přednášky pro předmět

Matematické modelování v geomechanice I

2. část – konstituční modelování

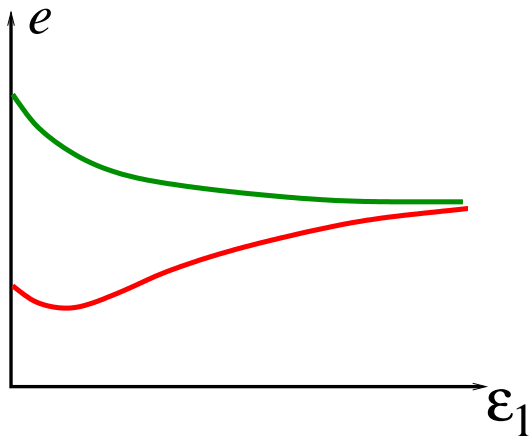
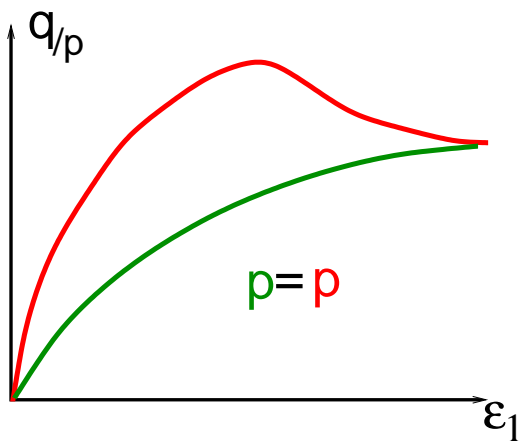
David Mašín

Obsah

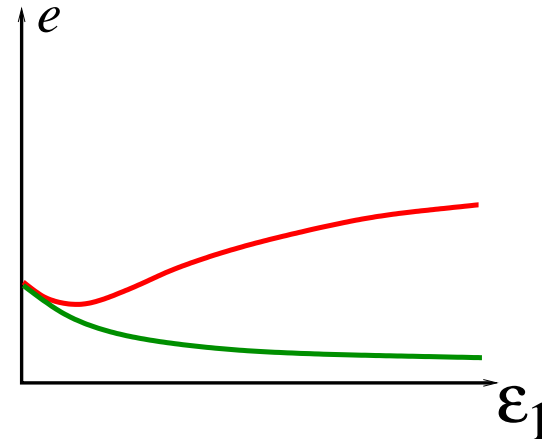
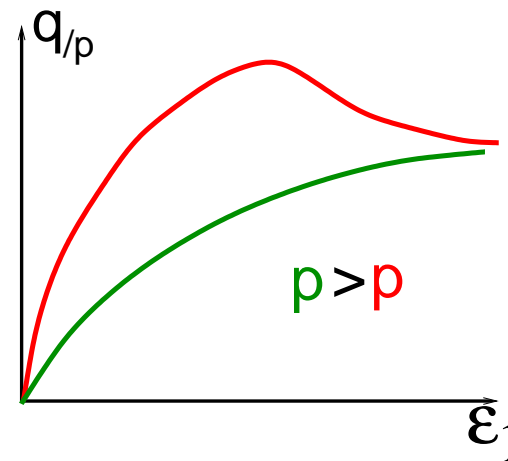
- Shrnutí chování zemin
- Úvod do konstitučního modelování
- Konstituční modely
 - ★ Pružnost
 - ★ Ideální plasticita
 - ★ Plasticita se zpevněním
 - ★ Hypoplasticita
 - ★ Reologické modely

Chování zeminy při velkých přetvořeních

- Vliv pórovitosti

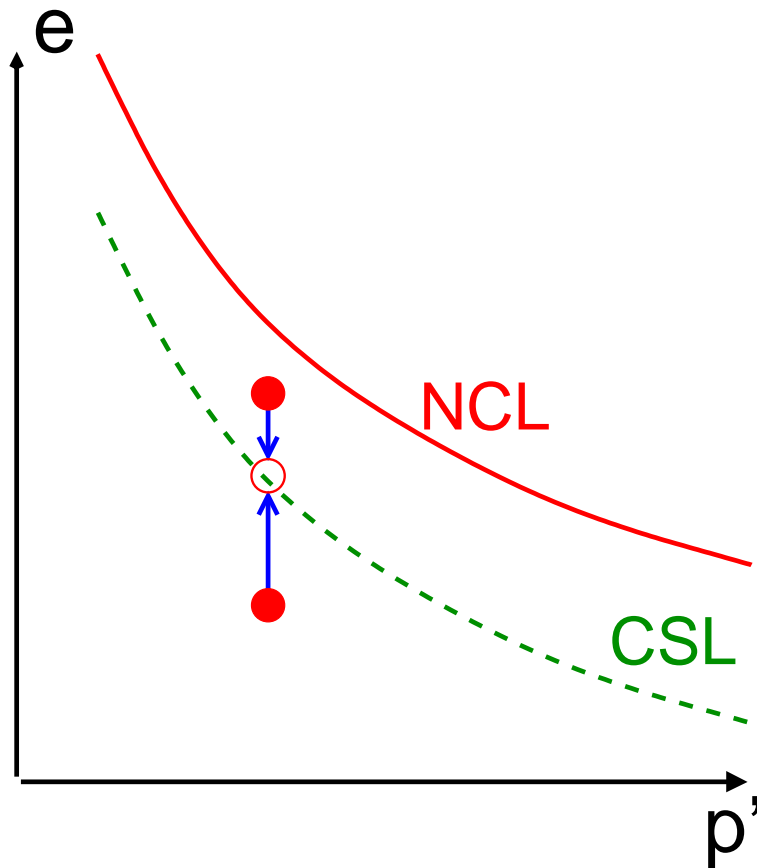


- Vliv napětí

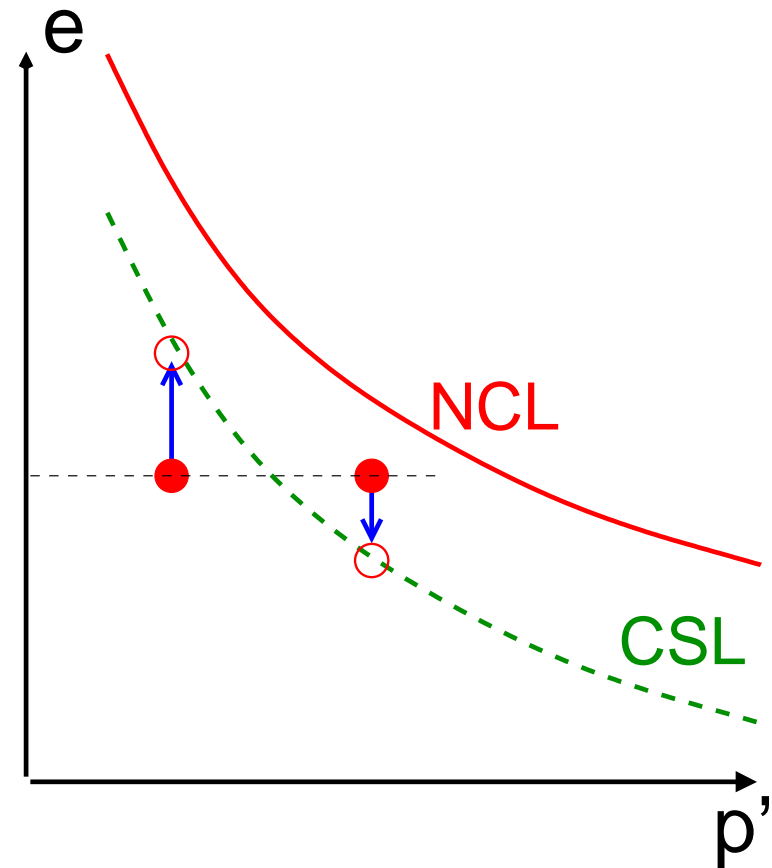


Chování zeminy při velkých přetvořeních

- Vliv pórovitosti

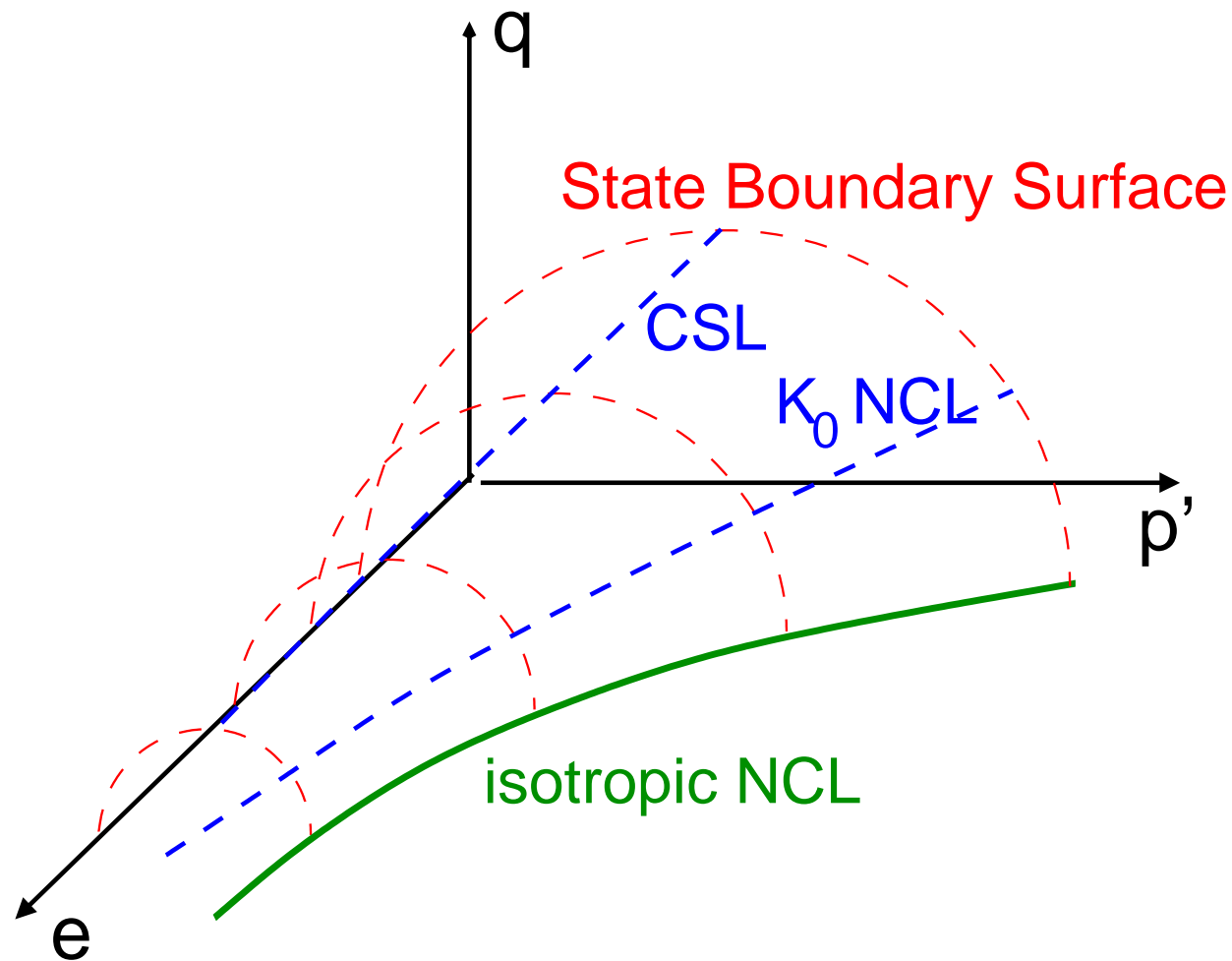


- Vliv napětí

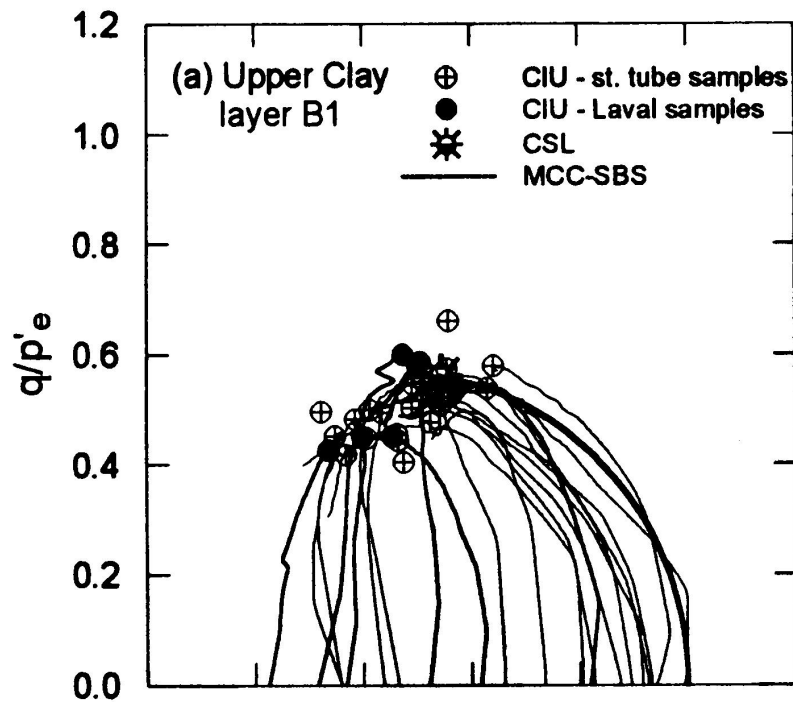


Chování zeminy při velkých přetvořeních

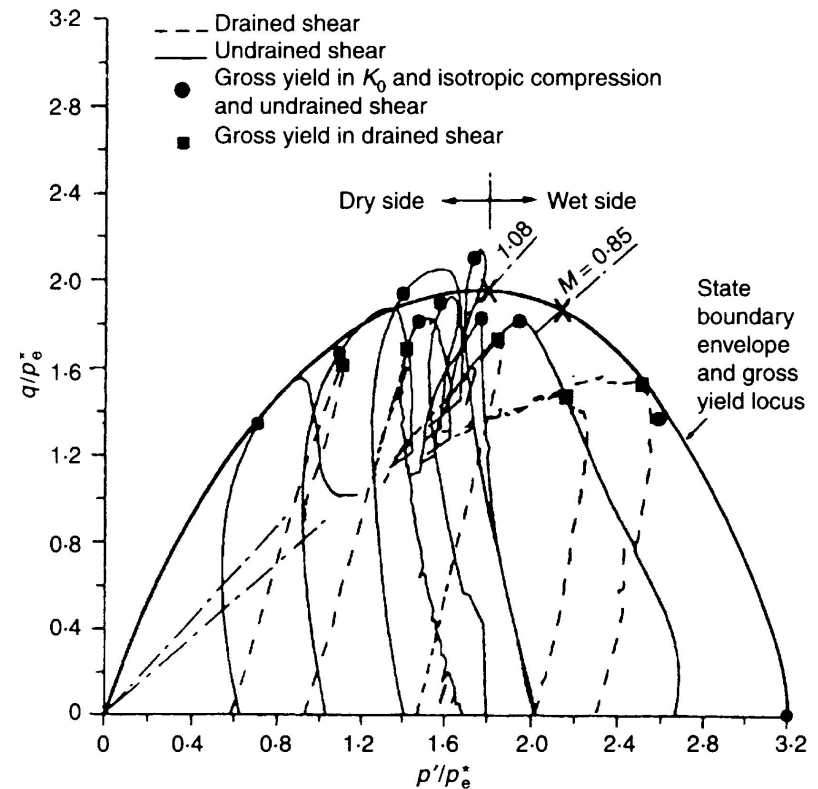
- Mezní plocha (*State Boundary Surface*)



Chování zemin při velkých přetvořeních



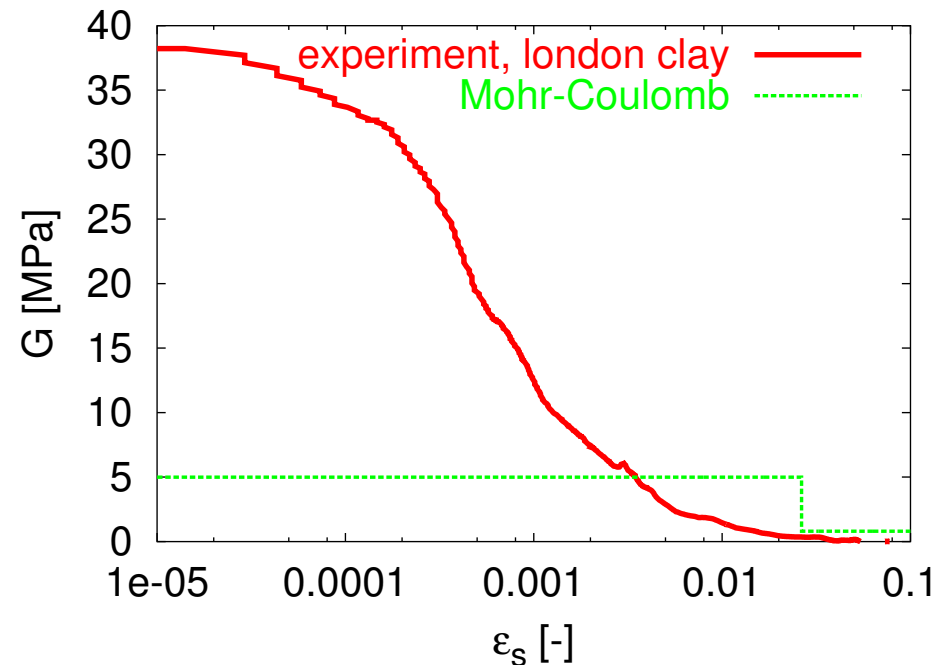
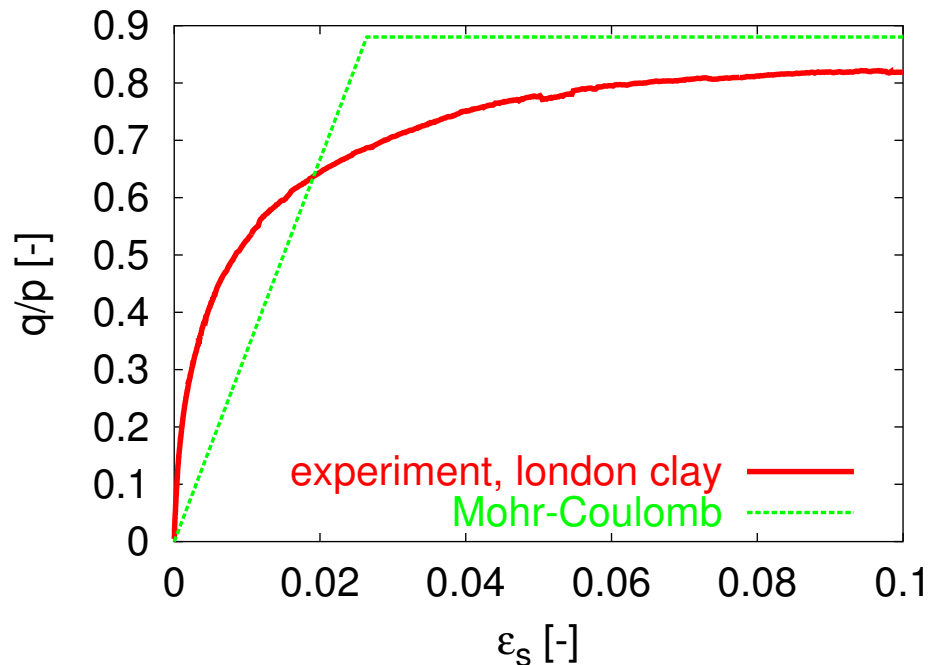
Rampello and Callisto, 1998



Cotecchia and Chandler, 2000

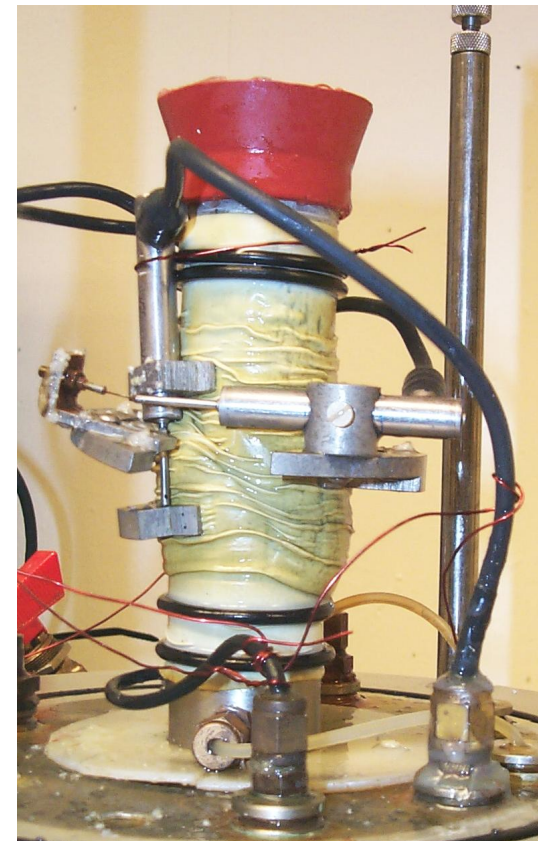
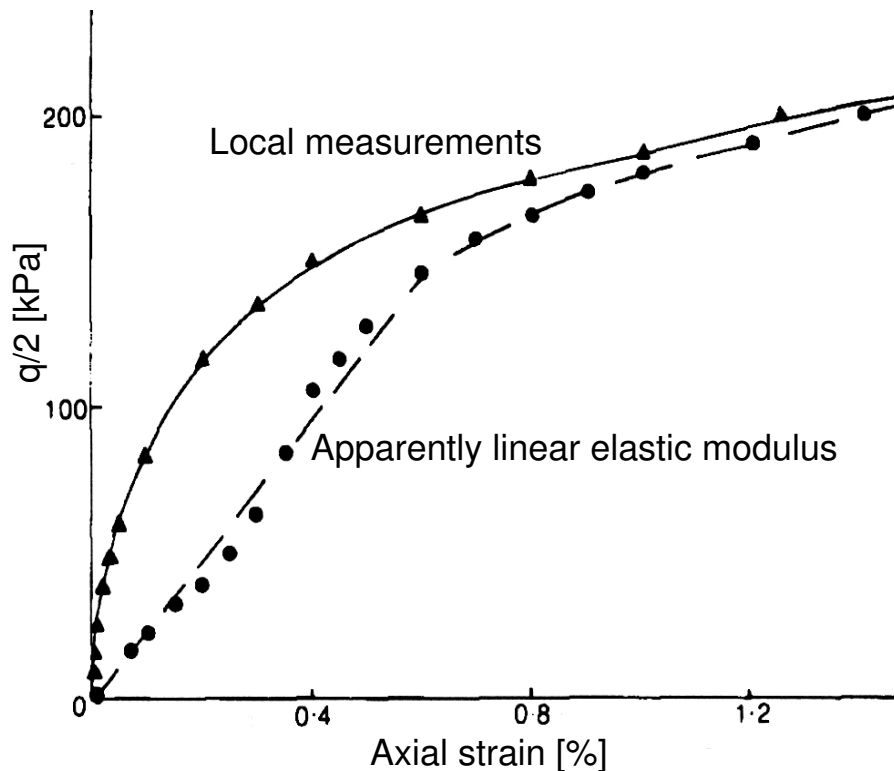
Chování zeminy při malých přetvořeních

- Nelinearita chování



Chování zeminy při malých přetvořeních

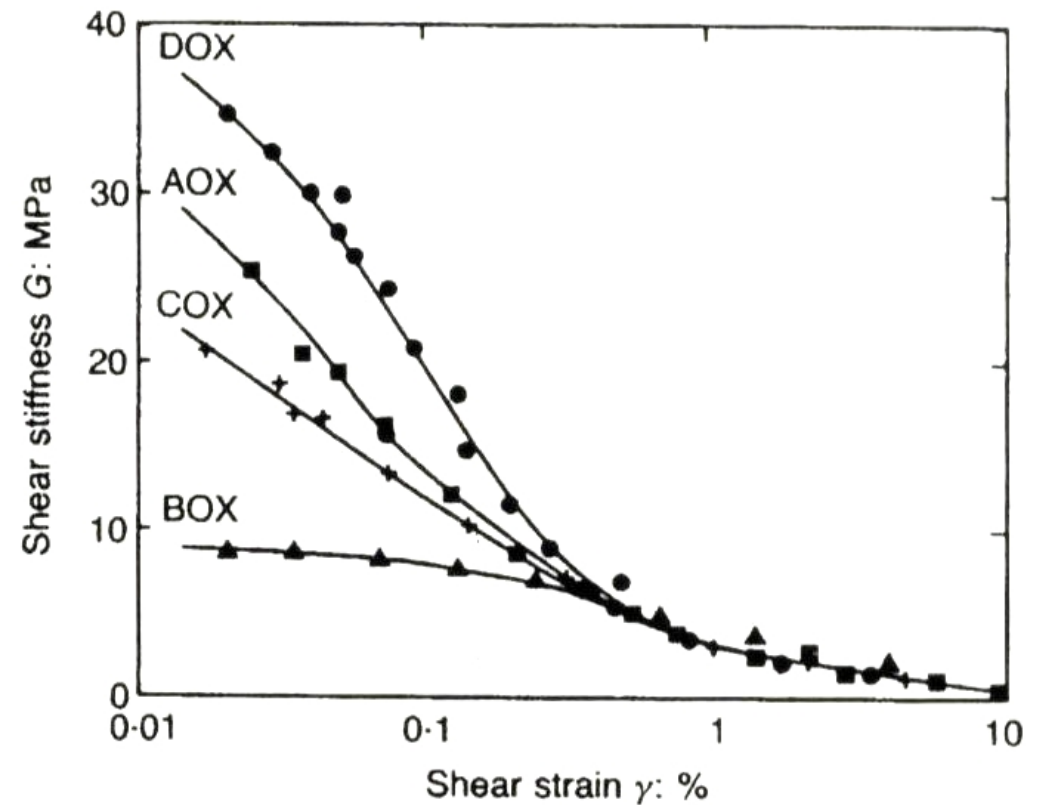
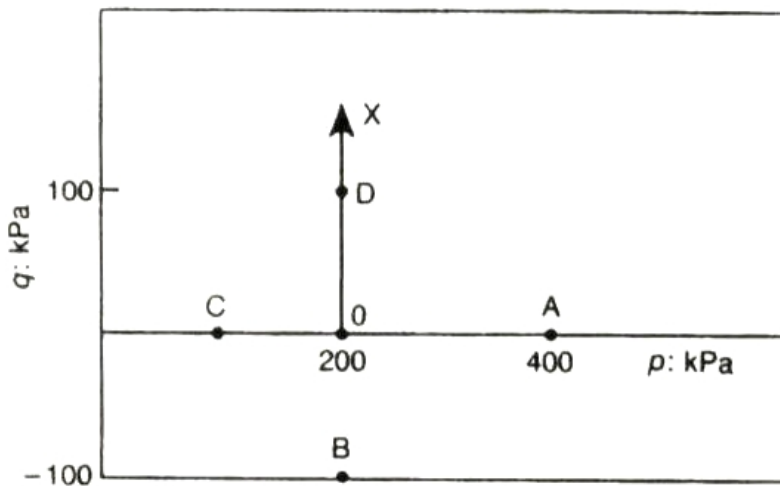
- Nelinearita chování



Jardine et al., 1984

Chování zeminy při malých přetvořeních

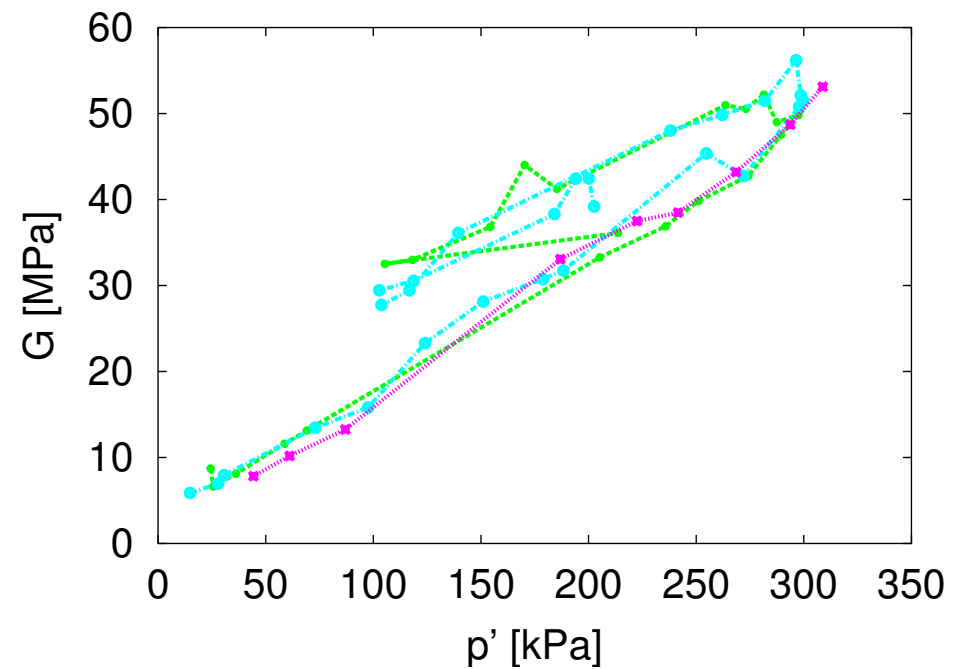
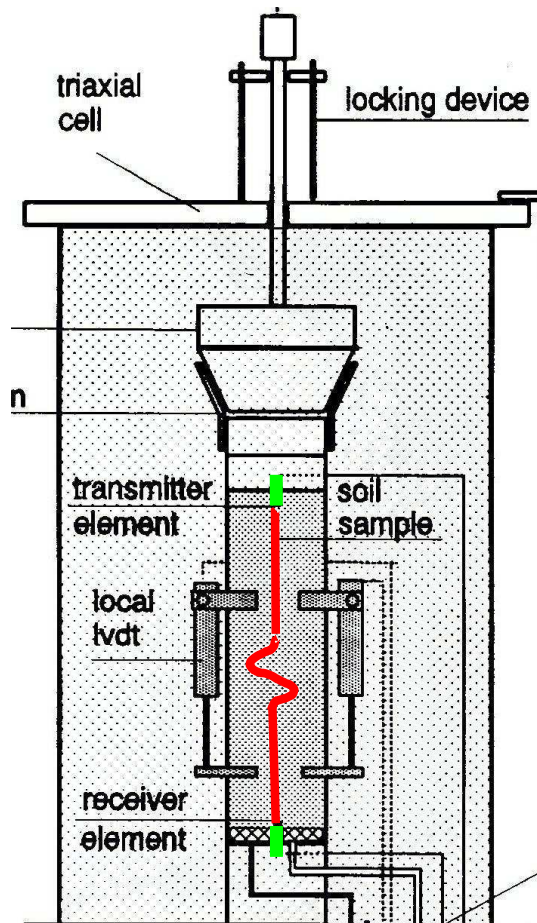
- Paměť na předchozí deformaci



Richardson, 1988

Chování zemin při malých přetvořeníích

- Závislost tuhosti na napětí



Mechanické chování zemin – základní charakteristiky

- 1** Chování zeminy je ovlivněno napětím a pórovitostí. Jejich kombinace určuje velikost objemových změn v průběhu smyku.
- 2** Je možno definovat mezní plochu (*state boundary surface*) v prostoru napětí a pórovitosti. Stav zeminy je vždy uvnitř této plochy.
- 3** V oboru malých přetvoření je chování zeminy značně nelineární (tuhost je závislá na přetvoření). Závisí i na předchozí deformační historii.
- 4** Tuhost je závislá na napětí.

Úvod do konstitučního modelování

Konstitučním (materiálovým) vztahem rozumíme matematickou závislost mezi deformací materiálu a jeho stavovými veličinami.

Je nedílnou součástí každé numerické analýzy. V geotechnice je díky komplexitě chování zemin vhodná volba konstitučního modelu zásadní pro správné řešení úlohy.

- Míra deformace materiálu, jež vstupuje do konstitučních vztahů, je vyjádřena tenzorem rychlosti deformace \mathbf{D} . Často se ale zanedbává vliv velkých přetvoření a rychlost deformace se aproximuje pomocí $\dot{\epsilon}$.

Přírůstek přetvoření ϵ se pak vypočte jako

$$\Delta\epsilon \simeq \dot{\epsilon}\Delta t$$

Tenzor \mathbf{D} (či $\dot{\epsilon}$) využíváme pro popis deformace i u *časově nezávislých* vztahů! V tomto případě je t pouze pseudo-čas, integrační proměnná jež kontroluje velikost $\Delta\epsilon$.

Stavové veličiny

- Stavové veličiny charakterizují stav materiálu. Patří mezi ně v první řadě Cauchyho napětí \mathbf{T} ($\boldsymbol{\sigma}$), dále číslo pórovitosti (e), ale také např. teplota, stupeň nasycení, či tenzorové stavové veličiny vyjadřující paměť na předchozí deformaci.

Konstituční model definuje rychlost změny stavových veličin v závislosti na jejich aktuálních hodnotách a na rychlosti deformace \mathbf{D} .

Konstituční model definuje *objektivní* rychlost stavových veličin, jež je nezávislá na rotaci tuhého tělesa (tj. např. pro napětí uvažujeme $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ a ne $\dot{\mathbf{T}}$).

Kromě nejjednodušších elastických modelů budeme u konstitučních modelů pro geomateriály vždy uvažovat jako stavovou proměnnou Cauchyho napětí \mathbf{T} (či $\boldsymbol{\sigma}$). Konstituční model v nejjednodušší formě bude tedy rovnice typu

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$$

jež se často pro malá přetvoření a rotace aproximuje pomocí

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$$

V případě většího množství stavových veličin musíme definovat i jejich evoluční rovnice. Pro model jež uvažuje číslo pórovitosti (e) jako další stavovou veličinu tedy můžeme funkci \mathbf{h} vyjádřit

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, e)$$

a musíme definovat funkci \mathbf{h}_2 definující rychlost \dot{e} .

$$\dot{e} = \mathbf{h}_2(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, e) = -(1 + e) \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$$

Obdobně bychom postupovali i při větším množství stavových veličin.

Časová závislost

V případě časově nezávislého konstitučního vztahu můžeme psát

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}, \gamma \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, e) = \gamma \mathbf{h}(\mathbf{T}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, e) = \gamma \dot{\mathbf{T}}$$

Říkáme, že funkce \mathbf{h} je pozitivně homogenní prvního řádu vzhledem k $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Až na reologické modely budou všechny probírané vztahy časově nezávislé.

Stavové veličiny a parametry

Vždy musíme striktně rozlišovat mezi *stavovými veličinami* a *parametry* modelu.

- *Stavové veličiny* jsou *proměnné* definující stav materiálu. Měly by být (alespoň teoreticky) měřitelné v každém časovém okamžiku. Např. napětí, pórovitost, sání, teplota. . . Pro výpočet je nutno znát počáteční hodnoty stavových veličin
- *Parametry* jsou *konstanty* charakterizující mechanické chování materiálu. Např. úhel vnitřního tření, Youngův modul pružnosti, Poissonovo číslo. . .

Pružnost (elasticita)

Pružný konstituční vztah má v obecné podobě formu

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M} : \dot{\epsilon}$$

kde tenzor čtvrtého řádu \mathcal{M} definující lineární transformaci mezi tenzory rychlosti deformace $\dot{\epsilon}$ a napětí $\dot{\sigma}$ se nazývá *matice tuhosti*.

Ekvivalentně je definována *matice poddajnosti* \mathcal{C} jako

$$\dot{\epsilon} = \mathcal{C} : \dot{\sigma}$$

Evidentně tedy platí

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}^{-1}$$

Lineární pružnost

V případě, že je *matice tuhosti* \mathcal{M} konstantní (model neuvažuje žádné stavové proměnné, včetně napětí), potom můžeme najít přímou závislost mezi celkovým napětím a celkovým přetvořením. Říkáme, že se jedná o *lineární pružnost*.

$$\sigma = \int_t \dot{\sigma} dt = \int_t (\mathcal{M} : \dot{\epsilon}) dt = \mathcal{M} : \int_t \dot{\epsilon} dt = \mathcal{M} : \epsilon$$

Lineární izotropní pružnost

V případě, že má materiál ve všech směrech shodné vlastnosti, říkáme že je *izotropní*.

Matice tuhosti je v případě *lineární izotropní pružnosti* určena dvěma parametry. Nejčastěji se používají:

- Objemový modul K
- Smykový modul G
- Youngův modul E
- Poissonovo číslo ν
- Lamého konstanta λ
- Oedometrický modul E_{oed}

Vždy *pouze dva* z těchto parametrů jsou nezávislé, s jejich pomocí je pak možno dopočítat ostatní (viz. dále).

Matici tuhosti \mathcal{M} , jež je tenzorem čtvrtého řádu, lze znázornit v maticovém tvaru (jako tenzor druhého řádu) tím způsobem, že tenzory napětí a přetvoření jsou uvažovány jako vektory:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}]$$

platí tedy $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ ($\dot{\sigma}_i = \mathcal{M}_{ij} \dot{\epsilon}_j$). Matice lineární izotropní tuhosti má potom tvar

$$\mathcal{M} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1 - \nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1 - \nu & & & \\ & & & 1 - 2\nu & & \\ & & & & 1 - 2\nu & \\ & & & & & 1 - 2\nu \end{bmatrix}$$

V tenzorovém zápisu lze pak matici lineární isotropní tuhosti zapsat

$$\mathcal{M} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\mathcal{I} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$$

A matici poddajnosti jako

$$\mathcal{C} = \mathcal{M}^{-1} = \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \mathcal{I} - \frac{\nu}{E} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

Fyzikální význam *Youngova modulu* E a *Poissonova čísla* ν je takový, že pro triaxiální axisymetrickou kompresi platí

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11} \qquad \nu = - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}$$

Izotropní lineární elasticita se někdy pomocí *smykového modulu* G a *objemového modulu* K , jež mají následující význam:

$$q = 3G\epsilon_s \qquad p = K\epsilon_v$$

což lze zapsat pomocí maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{bmatrix}$$

Lze ukázat, že vztah mezi G , K , E a ν je následující:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Matice tuhosti má potom zápis

$$\mathcal{M} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathcal{I}$$

Dále se někdy definuje tzv. *Lamého konstanta* λ

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = K - \frac{2}{3}G$$

s jejíž pomocí se vyjádření matice tuhosti zjednoduší na

$$\mathcal{M} = 2G\mathcal{I} + \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

Nakonec si definujeme tzv. *oedometrický modul* E_{oed} jako poměr axiálního napětí a přetvoření při oedometrické zkoušce:

$$\sigma_{11} = E_{oed}\epsilon_{11}$$

Opět se dá snadno ukázat, že

$$E_{oed} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Určení parametrů pružnosti

Parametry pružnosti lze určit mnoha způsoby, většinou využíváme fyzikální význam jednotlivých parametrů:

- Vyhodnocením *oedometrické zkoušky* získáme oedometrický modul E_{oed} (viz. definice). Pokud měříme radiální napětí v oedometru či provádíme K_0 zkoušku v triaxiálním přístroji, můžeme vypočítat Poissonův součinitel ν pomocí

$$K_0 = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Určení parametrů pružnosti

- Vyhodnocením standardní drénované *triaxiální zkoušky* můžeme zjistit velikost smykového modulu G , objemového modulu K či Youngova modulu E (viz. jejich definice). Velikost Poissonova součinitele ν lze získat z

$$\nu = \frac{\Delta\epsilon_{11} - \Delta\epsilon_v}{2\Delta\epsilon_{11}}$$

- Smykový modul G lze také vypočítat z rychlosti šíření smykových vln (např. zkouška bender elementy, viz. ←úvod)

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

ρ je hustota prostředí

Lineární anizotropní pružnost

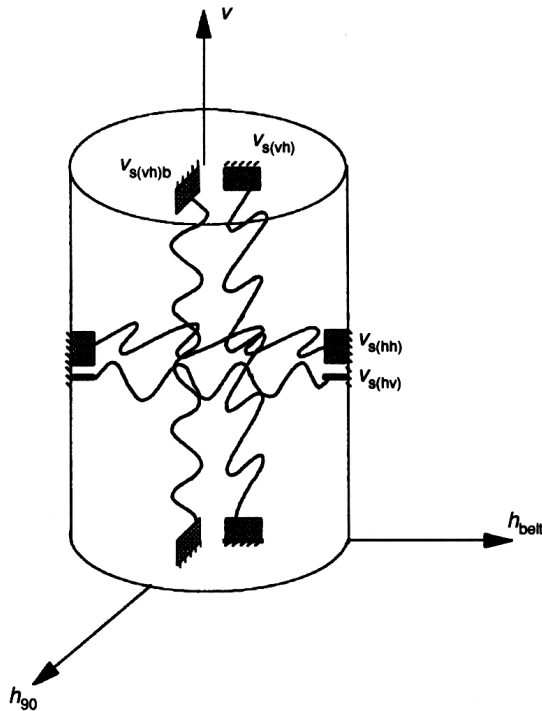
V případě, že materiál nemá stejné vlastnosti ve všech směrech (nelze libovolně zaměnit směry hlavních napětí), říkáme že je *anizotropní*.

Lineární pružnost má v obecném případě anizotropního materiálu 36 materiálových konstant! Pro geomateriály je nedokážeme určit.

U zemin ovšem často můžeme uvažovat, že jsou *transverzálně isotropní* (*ortotropní*, *cross-anizotropní*). Tzn. mají shodné vlastnosti v obou horizontálních směrech. Tato podmínka platí kromě speciálních případů jakými jsou geomateriály poblíž smykových zón apod.

Lineární ortotropní pružnost

Transverzálně izotropní elasticita má celkem 5 materiálových parametrů: E_v , E_h , ν_v , ν_{vh} a G_{vh} . Smykové moduly v různých směrech je možno měřit pomocí propagace *smykových vln*:



Př. $V_{s(hv)}$... Vlna procházející horizontálně s vertikální polarizací

Vzhledem k ortotropii platí např.

$$G_{vh} = G_{hv} \quad G_{hh} = \frac{E_h}{2(1 + \nu_{hh})}$$

⇒ Pouze 5 *nezávislých* parametrů.

Lineární ortotropní pružnost

Přestože nové metody propagace smykových vln umožní nalézt hodnoty pro všech 5 parametrů, často se využívají formulace s redukovaným počtem parametrů na 3.

V těchto případech je však již nutné zavést předpoklady, jež nejsou založené na fyzikálních základech, ale na pozorování!

Graham a Houlsby (1981) zavedli parametr α následujícím způsobem:

$$\alpha = \sqrt{\frac{E_h}{E_v}} = \frac{\nu_{hh}}{\nu_{vh}} = \frac{G_{hh}}{G_{hv}}$$

Matici tuhosti lze pak zapsat v maticovém zápisu jako:

$$\mathcal{M} = \frac{E^*}{(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)} \begin{bmatrix} 1 - \nu^* & \alpha\nu^* & \alpha\nu^* & & & & \\ \alpha\nu^* & \alpha^2(1 - \nu^*) & \alpha^2\nu^* & & & & \\ \alpha\nu^* & \alpha^2\nu^* & \alpha^2(1 - \nu^*) & & & & \\ & & & \frac{1}{2}\alpha(1 - 2\nu) & & & \\ & & & & \frac{1}{2}\alpha(1 - 2\nu) & & \\ & & & & & \frac{1}{2}\alpha(1 - 2\nu) & \end{bmatrix}$$

Index * u E^* a ν^* je přidán pro odlišení od parametrů E a ν u izotropní elasticity.

Lineární ortotropní pružnost lze také definovat pomocí invariantů napětí a přetvoření obdobně jako izotropní pružnost:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^* & J \\ J & 3G^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{bmatrix}$$

Parametry K^* , G^* a J lze vypočítat z E^* , ν^* a α .

Na rozdíl od izotropní elasticity je parametr J různý od nuly. *U anizotropního materiálu smykové přetvoření ovlivňuje střední napětí a objemové přetvoření ovlivňuje smykové napětí.*

Shrnutí lineární pružnosti

Lineární pružnost je využitelná pro:

- Simulaci chování zemního masivu při velmi malých přetvořeních (dynamické problémy).
- Kalibraci numerických metod na základě analytických řešení, jež máme jen pro nejjednodušší konstituční modely.
- Ale zejména je lineárně (či nelineárně, viz. dále) pružný vztah *nedílnou součástí pokročilejších elasto-plastických modelů*. Proto je mu nutno věnovat dostatečnou pozornost i přes to, že zcela nevystihuje chování zemin při větších přetvořeních.

Shrnutí lineární pružnosti

Model umožňuje/neumožňuje predikovat:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Shrnutí lineární pružnosti

Model umožňuje/neumožňuje predikovat:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Nelineární pružnost

Formulace nelineárně pružného modelu je ekvivalentní lineárně pružnému:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M} : \dot{\epsilon}$$

V případě *nelineární pružnosti* ovšem není matice tuhosti \mathcal{M} konstantní, ale závisí na hodnotě stavových veličin. Z toho důvodu musí být model definován přírůstkově.

$$\sigma = \int_t \dot{\sigma} dt = \int_t (\mathcal{M} : \dot{\epsilon}) dt \neq \mathcal{M} : \int_t \dot{\epsilon} dt = \mathcal{M} : \epsilon$$

Nelineární pružnost

První typ nelineárně elastických modelů zohledňuje experimentálně zjištěnou závislost modulů na napětí. Cauchyho napětí σ je tedy stavovou veličinou.

Ohde (1939) definoval vztah vhodný pro popis *oedometrické stlačitelnosti*

$$E_{oed} = E_0 \left(\frac{\sigma_{ax}}{\sigma_0} \right)^\alpha$$

Nelineární pružnost

Ohdeho rovnici stlačitelnosti je možno interpretovat na základě mikromechanického popisu pomocí Hertzovi teorie kontaktních deformací. Pro zrnité prostředí složené z kulových zrn v kubickém uspořádání vyplývá

$$E_{oed} = kp^{1/3}$$

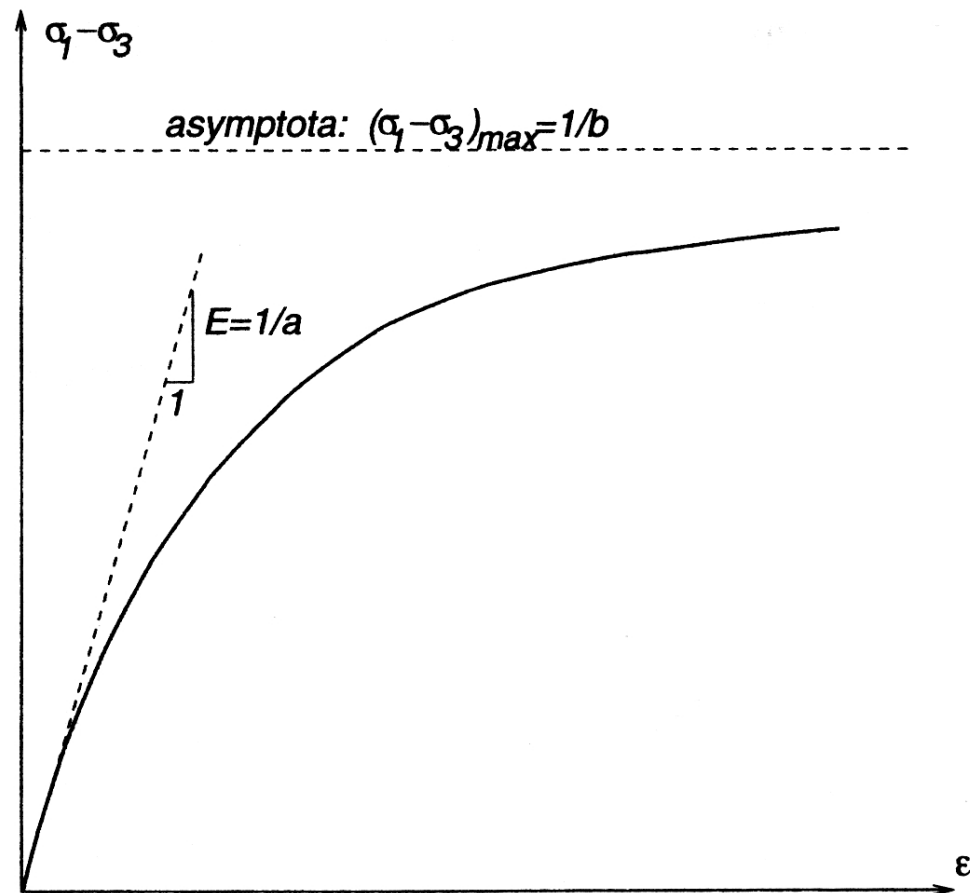
Exponent α v Ohdeho rovnici lze interpretovat jako faktor zohledňující tvar zrn a jejich uspořádání.

Smykání

Pracovní diagram *drénované triaxiální zkoušky* se často aproximuje pomocí hyperbolické rovnice:

$$q = \frac{\epsilon}{a + b\epsilon}$$

Význam parametrů a a b je následující:



Pokles *tečného* Youngova modulu pro hyperbolickou rovnici získáme:

$$E = \frac{\partial q}{\partial \epsilon} = \frac{a}{(a + b\epsilon)^2}$$

V hyperbolickém vztahu (viz. ←) máme $a = 1/E_{0i}$ a $b = 1/q_{max}$, tedy

$$E = \frac{1/E_{0i}}{(1/E_{0i} + \epsilon/q_{max})^2}$$

Tento vztah vyjadřuje závislost E na napětí a přetvoření. Přetvoření lze ale z formulace vyeliminovat. Ze základního vztahu získáme

$$\epsilon = \frac{qq_{max}}{E_{0i}(q_{max} - q)}$$

A dosazením získáme

$$E = E_{0i} \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right)^2$$

Duncan-Changův model

Vyvinut v 70. letech spojením hyperbolického modelu (\searrow) a Ohdeho rovnice stlačitelnosti (\leftarrow). Do hyperbolického vztahu včleníme Ohdeho rovnici:

$$E_{0i} = E_0 \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_0} \right)^\alpha$$

Dále definujeme parametr R_f jako poměr asymptotického napětí z hyperbolicé rovnice (q_{max}) a napětí při porušení (q_f):

$$R_f = \frac{q_f}{q_{max}} \leq 1$$

Duncan-Changův model

A využijeme Mohr-Coulombovu podmínku porušení:

$$q_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_r \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

čímž získáme vztah pro *Duncan-Changův model*:

$$E = E_0 \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_0} \right)^\alpha \left[1 - \frac{q R_f (1 - \sin \varphi)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_r \sin \varphi} \right]^2$$

Shrnutí Duncan-Changova modelu

Je zřejmé, že *Duncan-Changův model* se snaží modelovat *porušení* materiálu s pomocí teorie elasticity.

Výsledkem je, že model umožňuje realistické predikce pouze pro *pracovní diagram drénované triaxiální zkoušky pro prvotní přetížení*, pro něž byl vyvinut.

Pro obecné dráhy napětí ovšem model není spolehlivý. Model také správně predikuje pouze pracovní diagram, objemové změny v průběhu smyku jsou předpovídány chybně. Zcela nerealistické jsou předpovědi pro odlehčení.

Shrnutí Duncan-Changova modelu

Model umožňuje/neumožňuje predikovat:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

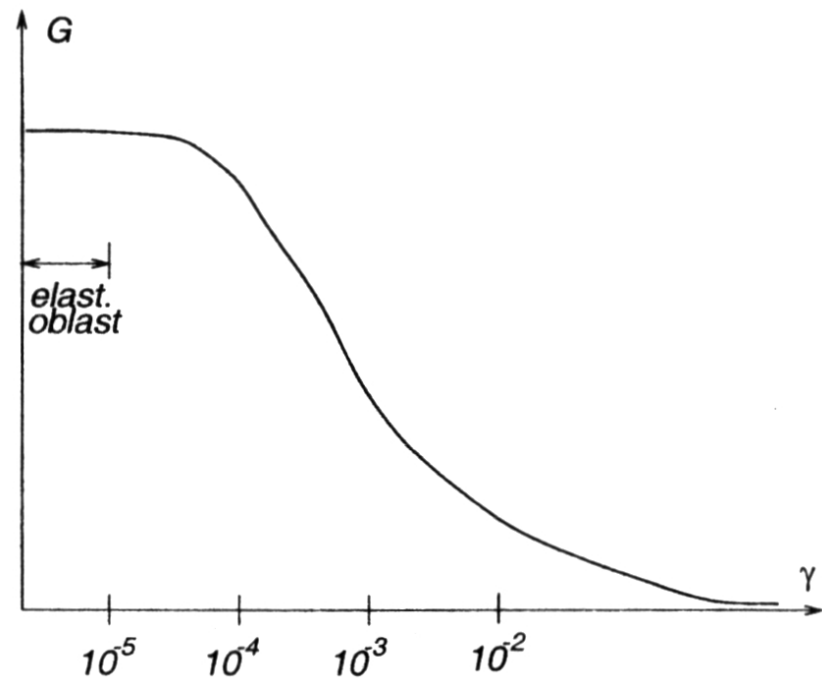
paměť na předchozí deformaci

Přestože model predikuje nelinearitu v oboru malých přetvoření, tuhost v oboru velmi malých přetvoření je vždy podhodnocena.

Obor velmi malých přetvoření

Z předešlého vyplývá, že nelineární elasticita *není vhodná* pro modelování chování zemin *při větších přetvořeních* – zeminy se nechovají elasticky, přetvoření jsou nevratná.

Nicméně se ukazuje, že v *oboru velmi malých přetvoření* ($\epsilon < 10^{-3}\%$) lze uvažovat přetvoření jako vratná – elastická. Vhodný nelineárně elastický model lze v tomto oboru využít jako *ingredienci pro komplexnější elasto-plastické vztahy*.



Obor velmi malých přetvoření

Viggiani and Atkinson (1995) vyvinuli vztah pro velikost smykového modulu G na základě měření tuhosti zemin při velmi malých přetvořeních pomocí propagace smykových vln:

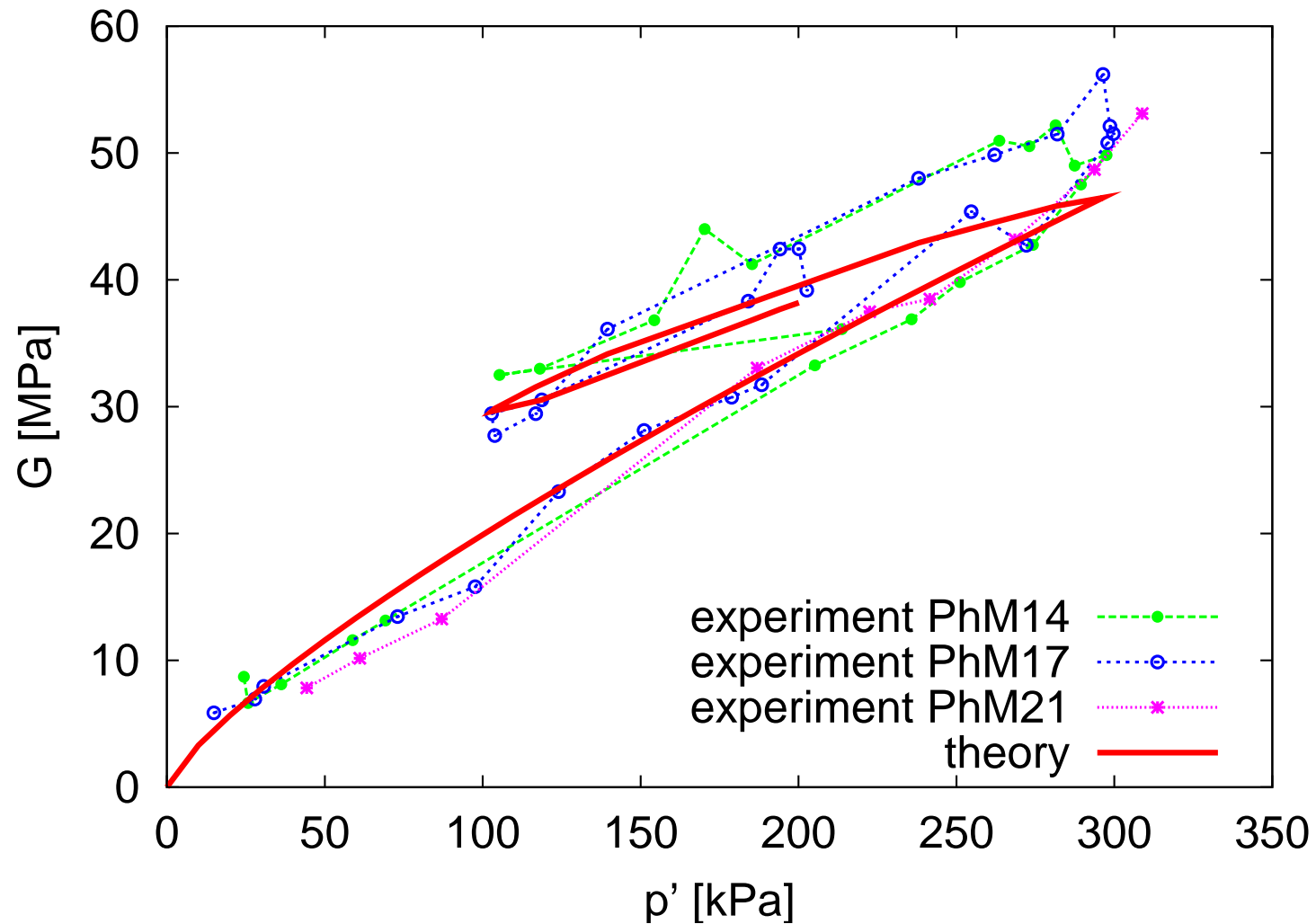
$$\frac{G}{p_r} = A \left(\frac{p}{p_r} \right)^n R_0^m \quad (1)$$

p_r je referenční napětí 1 kPa a R_0 je stupěň překonsolidace. Vztah lze kombinovat s objemový modulem K lineárně závislým na středním napětí p (Butterfield, 1979).

$$K = \frac{p}{\kappa^*} \quad (2)$$

Čímž je plně definovaný nelineárně elastický model s *parametry* A , n , m a κ^* a *stavovými proměnnými* σ a R_0 .

Obor velmi malých přetvoření



Pokles tuhosti s přetvořením

Pro realistické modelování chování zemin při větších přetvořeních se předchozí vztah kombinuje s teorií plasticity (viz. dále). V některých případech lze ale využít i jednoduchý model, kdy do předchozího vztahu zavedeme i závislost tuhosti na přetvoření, *jež je pak stavovou proměnnou.*

Pokles tuhosti s přetvořením

Příkladem může být následující vztah:

$$G = G_0 \quad \text{pro} \quad \epsilon_s < R$$

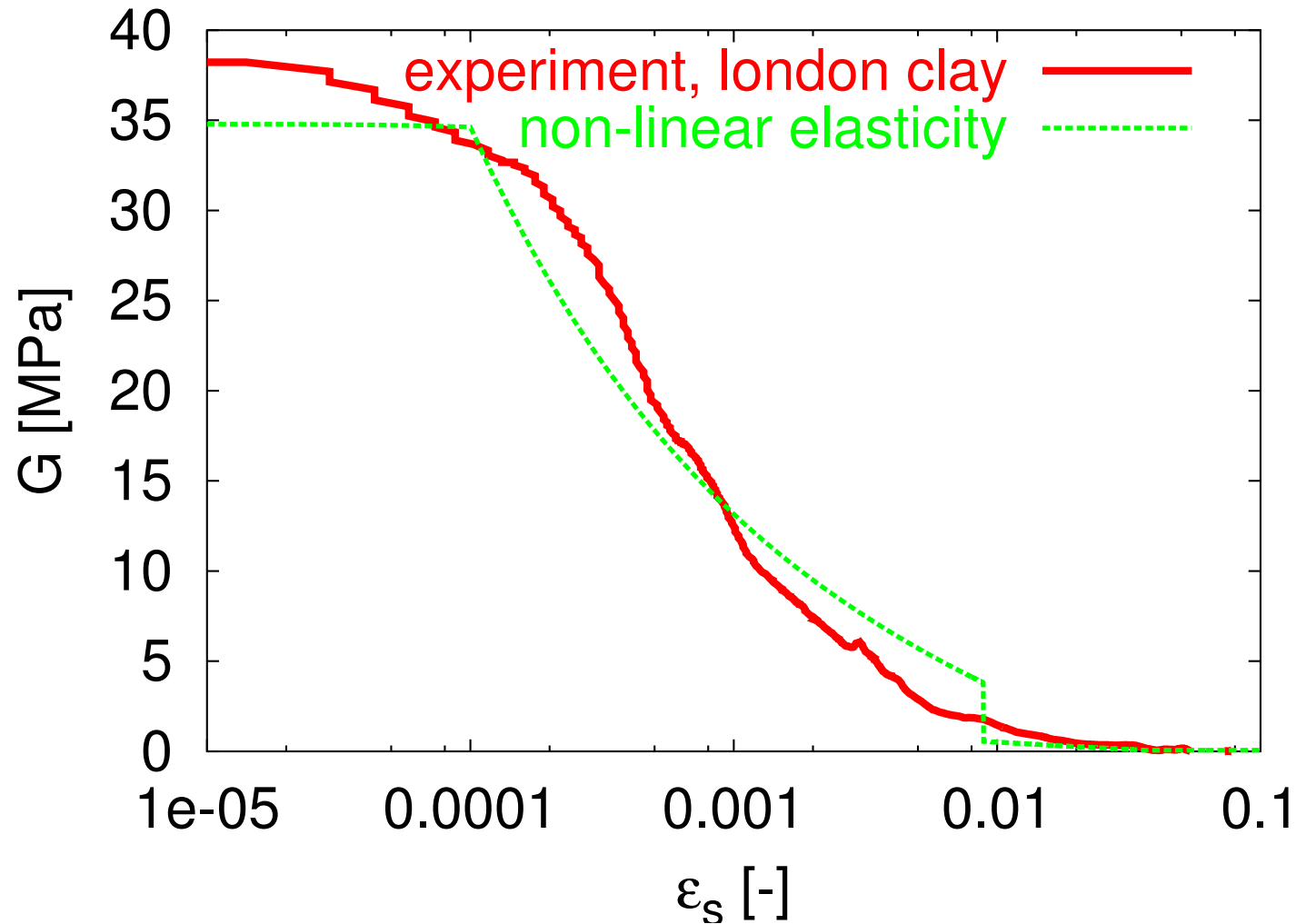
$$K = K_0 \quad \text{pro} \quad |\epsilon_v| < R$$

jinak

$$G = G_0 \left(\frac{R}{\epsilon_s} \right)^\gamma \quad ; \quad K = K_0 \left(\frac{R}{|\epsilon_v|} \right)^\delta$$

G_0 a K_0 jsou počítány pomocí rovnic (1) a (2). Takovýto model uvažuje navíc parametry R , γ a δ a stavovou proměnnou ϵ .

Pokles tuhosti s přetvořením



Shrnutí nelineárně elastického modelu s přetvořením jako stavovou proměnnou

Model umožňuje/neumožňuje predikovat:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Přesto model může být vhodný pro predikce některých geotechnických úloh kde dochází pouze k malým přetvořením.

Ideální plasticita

Základní charakteristikou elasto-plastických modelů je, že se přetvoření dělí na *vratná (elastická)* ϵ^e a *nevratná (plastická)* ϵ^p .

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

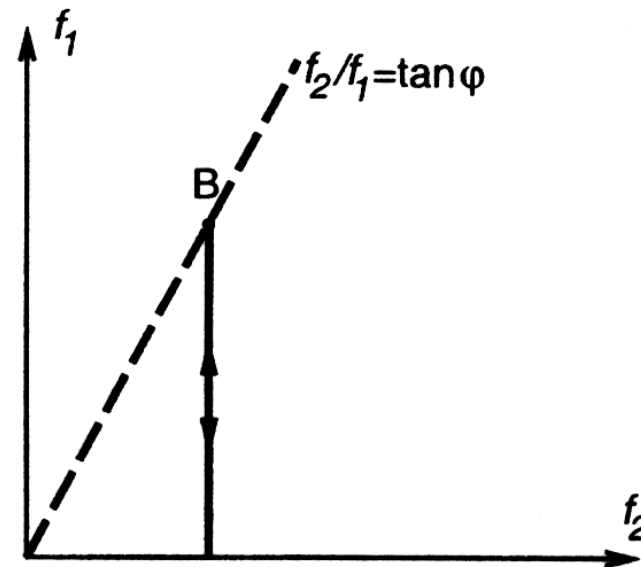
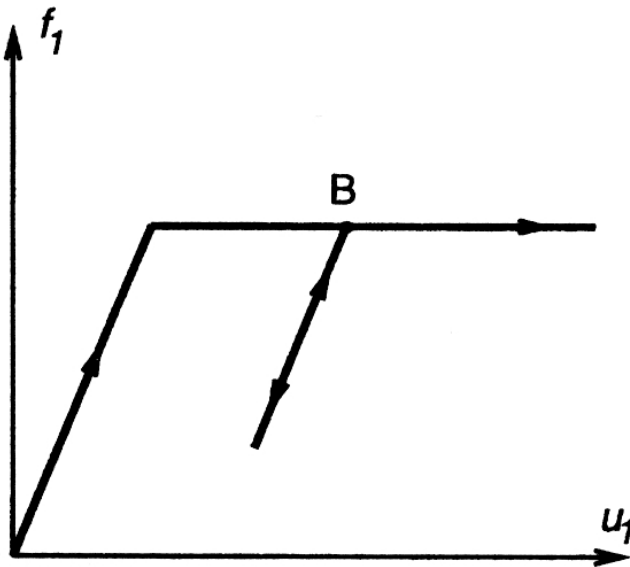
Elasto-plastický konstituční vztah má v obecné podobě formu:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M}^{ep} : \dot{\epsilon} = \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon}^e = \mathcal{M}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p)$$

kde \mathcal{M}^e je elastická matice tuhosti (z předchozí kapitoly) a \mathcal{M}^{ep} je tzv. *elasto-plastická matice tuhosti*.

Podmínka plastického zatěžování

Elasto-plasticita zavádí podmínku jež "přepíná" mezi dvěma základními způsoby deformace: *elastickou* a *elasto-plastickou*, nazývanou *podmínka plastického zatěžování*.



Pokud je deformace *elastická*, potom

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \quad \text{a} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e$$

Pokud je deformace *elasto-plastická*, potom

$$\dot{\epsilon}^p \neq 0 \quad \text{a} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

Pro rozlišení zda dochází k elastické či elasto-plastické deformaci používáme tzv. *podmínku plasticity* f . U *ideálně plastických* modelů je podmínka plasticity závislá pouze na stavové proměnné napětí, tedy $f(\boldsymbol{\sigma})$.

Pomocí podmínky plasticity $f(\boldsymbol{\sigma})$ definujeme tzv. *plochu plasticity* $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, která vymezuje v prostoru napětí část v níž leží všechny dosažitelné stavy zeminy.

Stav zeminy *uvnitř* plochy plasticity je definovaný jako $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$, stav na ploše plasticity pomocí $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Stav *vně* plochy plasticity $f(\boldsymbol{\sigma}) > 0$ je fyzikálně nepřípustný.

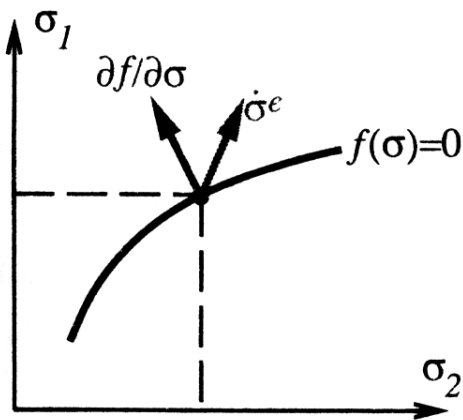
Podmínka plastického zatěžování říká, že:

Deformace materiálu je elasto-plastická, pokud je stav na ploše plasticity a současně přírůstek přetvoření směřuje k "přitěžování"

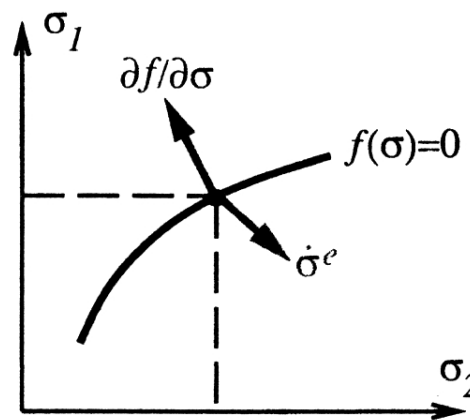
Pro stavy na ploše plasticity $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ zjistíme, zda přírůstek deformace směřuje k elasto-plastickému přitěžování či elastickému odlehčování pomocí tzv. *zkušebního přírůstku napětí* $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

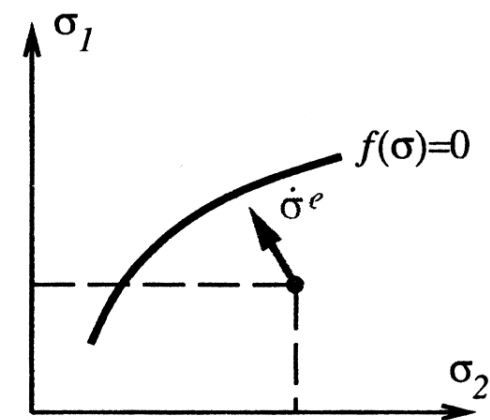
Podmínka plastického zatěžování je demonstrována na následujícím obrázku. (a) odpovídá elasto-plastickému přitěžování a (b) a (c) elastické deformaci



(a)



(b)



(c)

Matematicky zapíšeme podmínku plasticity následující způsobem:

- (a) Stav napětí je na ploše plasticity a zkušební přírůstek $\dot{\sigma}^e$ směřuje vně plochu plasticity \Rightarrow Dochází k elasto-plastickému přitěžování.

$$f(\sigma) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma}^e > 0$$

- (b) Stav napětí je na ploše plasticity a zkušební přírůstek $\dot{\sigma}^e$ směřuje dovnitř či podél plochy plasticity \Rightarrow Odezva je elastická.

$$f(\sigma) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma}^e \leq 0$$

- (c) Stav napětí je uvnitř plochy plasticity \Rightarrow Odezva je elastická.

$$f(\sigma) < 0$$

Podmínky plasticity

Z předešlého vyplývá, že podmínka plasticity $f(\boldsymbol{\sigma})$ je základní ingredience elasto-plastických modelů. Mezi nejpoužívanější podmínky plasticity patří:

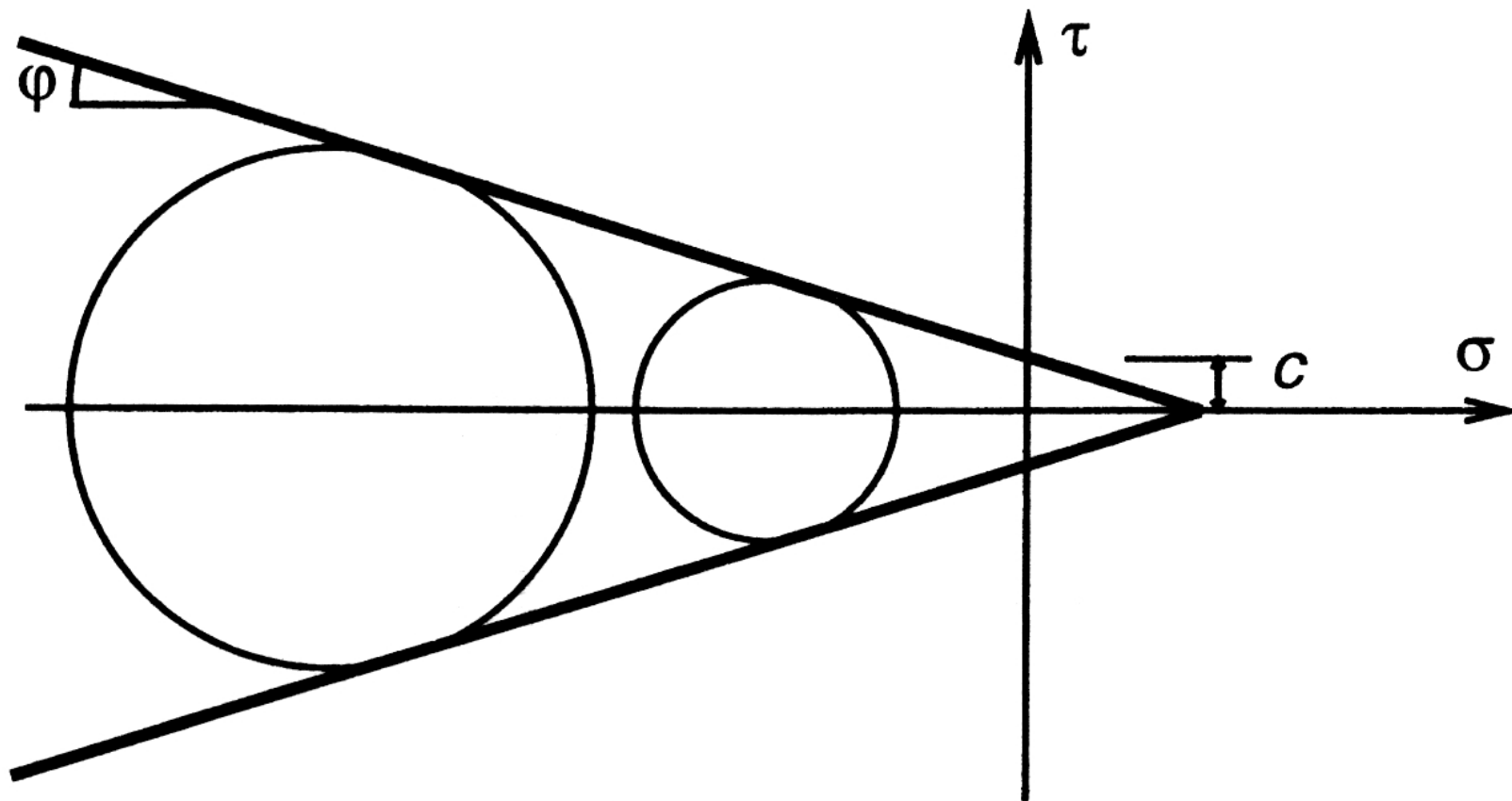
- **Mohr-Coulombova podmínka plasticity**

Je definována *konstantním úhlem vnitřního tření* pomocí

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tau + \sigma \tan \varphi - c = 0$$

kde τ a σ jsou smyková a normálová napětí na smykové ploše, φ je úhel vnitřního tření a c je soudržnost vyjadřující smykovou pevnost při nulovém normálovém napětí.

- Mohr-Coulombova podmínka plasticity



- **Mohr-Coulombova podmínka plasticity**

Pro numerickou implementaci Mohr-Coulombovy podmínky plasticity je vhodnější zápis pomocí maximálních a minimálních hlavních napětí:

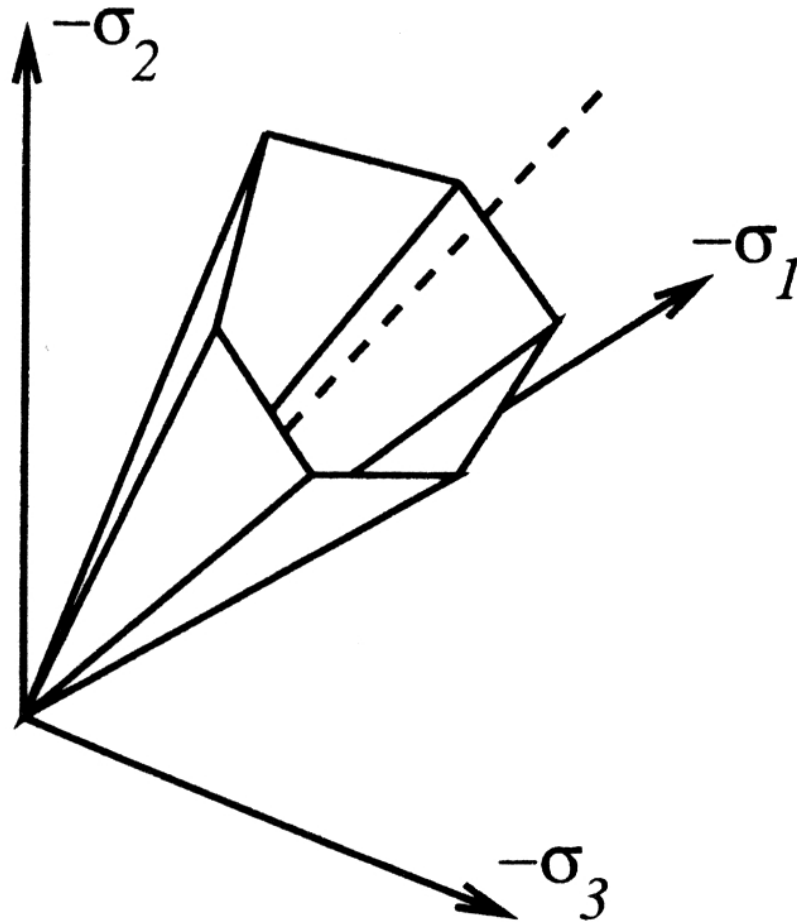
$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0$$

σ_1 a σ_3 jsou maximální a minimální hlavní napětí, počítaná jako vlastní čísla tenzoru napětí (viz. přednášky, část 1.)

Je tedy zřejmé, že na tvar Mohr-Coulombovy podmínky plasticity *nemá vliv střední hlavní napětí.*

- **Mohr-Coulombova podmínka plasticity**

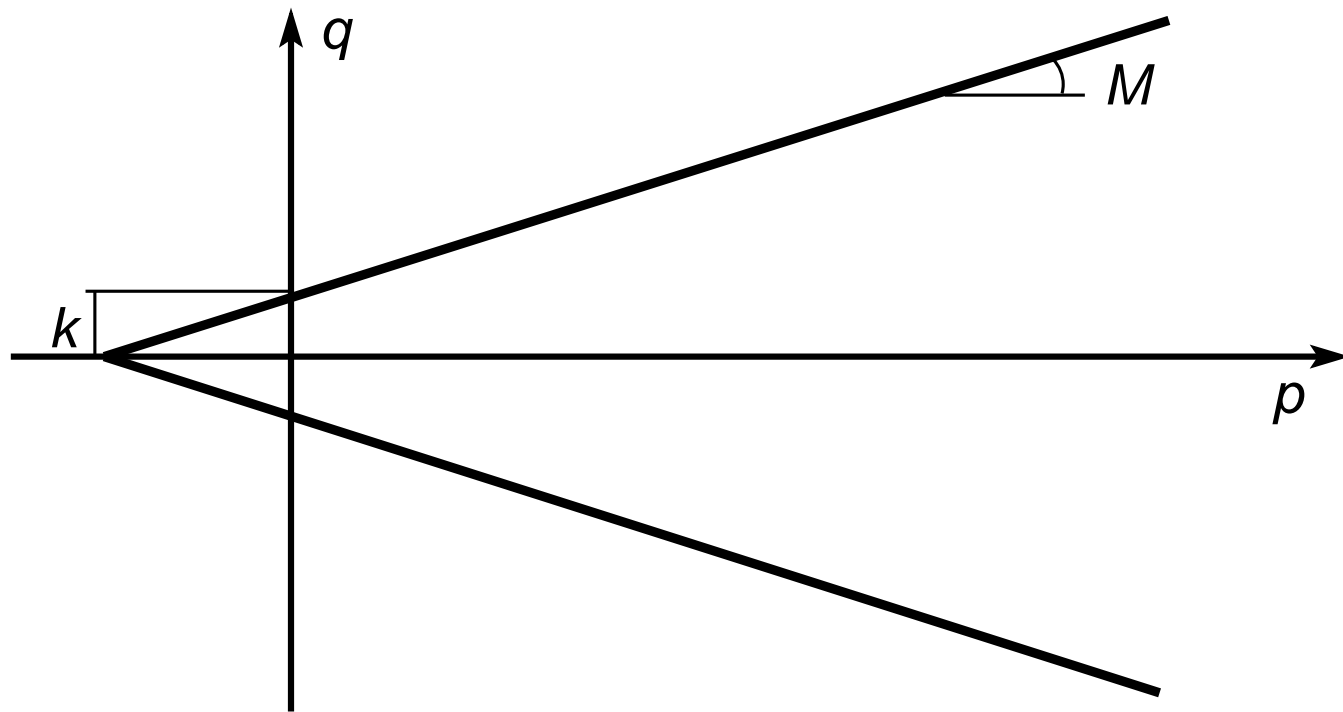
V prostoru hlavních napětí má Mohr-Coulombova plocha plasticity tvar pravidelného šestibokého jehlanu. "Hrany" (singularity pro výpočet gradientu) mohou působit numerické problémy.



- **Drucker-Pragerova podmínka plasticity**

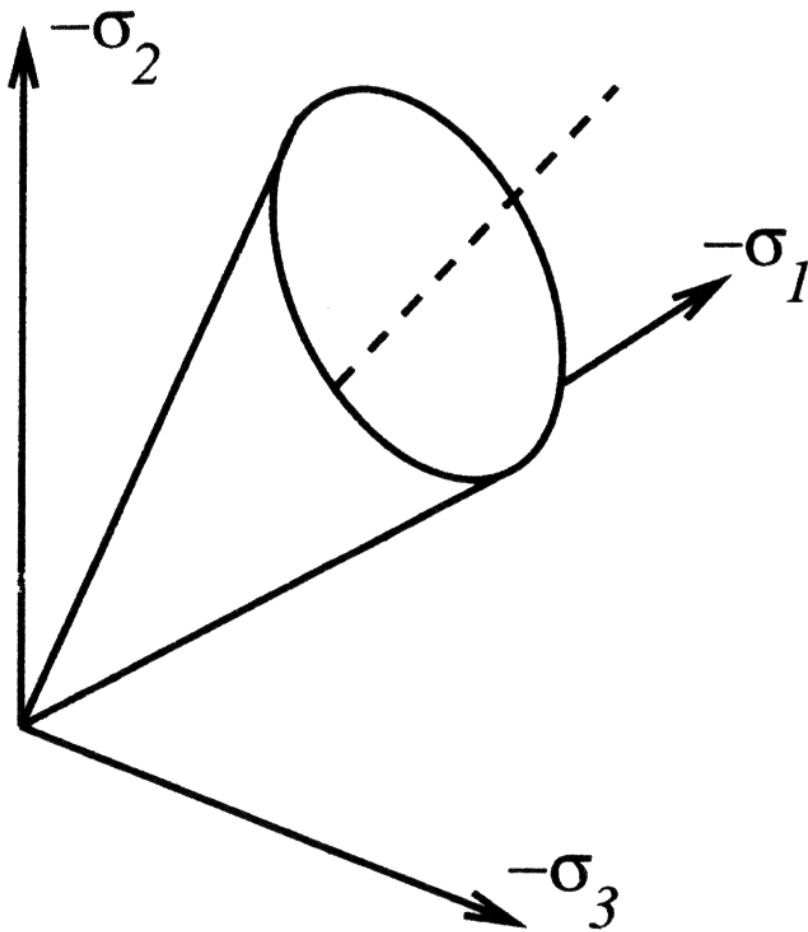
Je definována *konstantním poměrem deviatorového napětí q a středního napětí p .*

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = q - Mp - k = 0$$



- **Drucker-Pragerova podmínka plasticity**

V prostoru hlavních napětí má Drucker-Pragerova podmínka tvar *rotačního kužele* (připomeňme, že deviátorové napětí q vyjadřuje v prostoru hlavních napětí vzdálenost bodu od osy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).



- **Drucker-Pragerova podmínka plasticity**

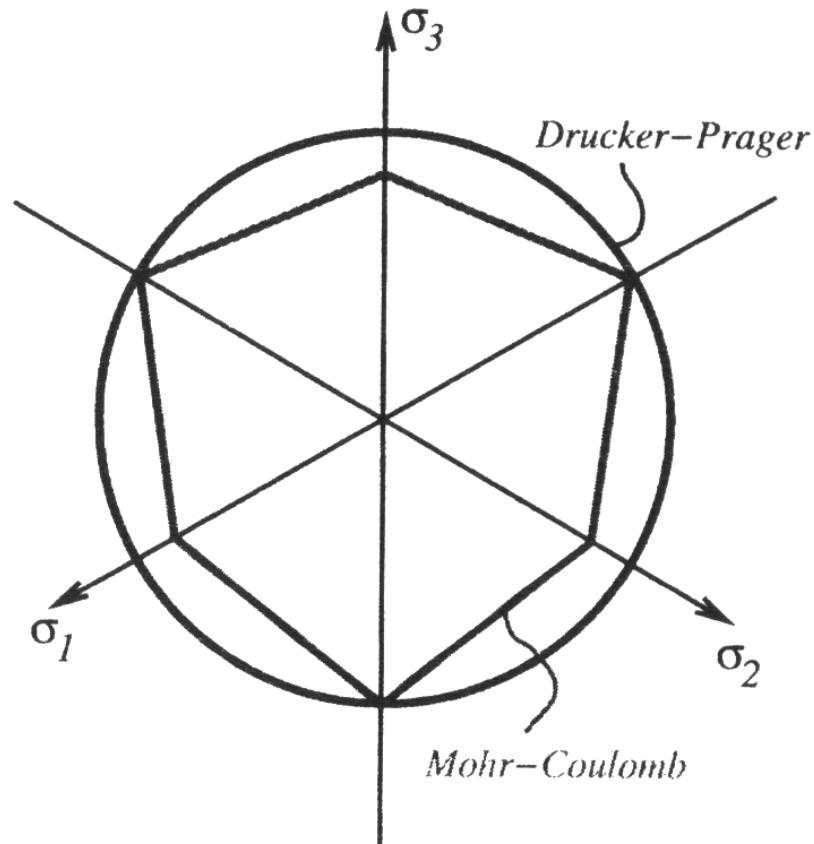
Pomocí hlavních napětí se Drucker-Pragerova podmínka plasticity zapíše jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} + \frac{1}{3}M(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - k = 0$$

Střední hlavní napětí má tedy na tvar Drucker-Pragerovy podmínky plasticity *stejný vliv* jako minimální a maximální hlavní napětí.

- **Porovnání Drucker-Pragerovy a Mohr-Coulombovy podmínky plasticity**

V deviatorové rovině (viz. předášky, 1. část) mají Drucker-Pragerova a Mohr-Coulombova podmínka následující tvar:



- **Porovnání Drucker-Pragerovy a Mohr-Coulombovy podmínky plasticity**

Z čehož vyplývá, že vztah mezi parametry φ , c , M a k lze nalézt pouze pro speciální stavy napjatosti. Např. pro triaxiální axisymetrické stlačení platí:

$$M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad \text{a} \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}$$

- **Porovnání Drucker-Pragerovy a Mohr-Coulombovy podmínky plasticity**

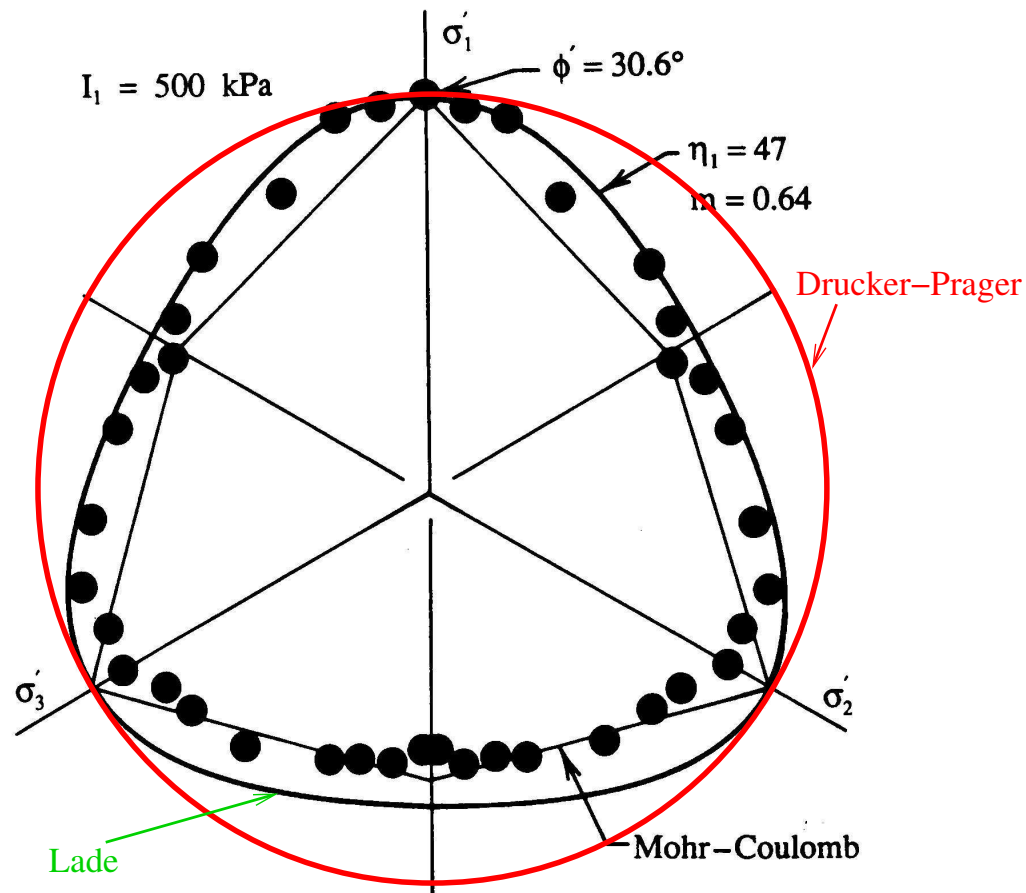
Přestože Drucker-Pragerova podmínka je výhodná z matematického hlediska (kromě vrcholu jehlanu nemá singulární body), ukazuje se, že chování zemin *má mnohem blíže* Mohr-Coulombově podmínce.

Tedy: zeminy se (přibližně, viz. dále) vyznačují *konstantním úhlem vnitřního tření v kritickém stavu* φ_c , ne konstantním poměrem q/p .

Kalibrování Drucker-Pragerovy podmínky na základě zkoušky v triaxiálním stlačení vede k výraznému nadhodnocení úhlu vnitřního tření v triaxiálním roztažení i v rovinném přetváření.

• Ostatní podmínky plasticity

Ukazuje se, že skutečné chování zemin má blíže Mohr-Coulombově podmínce, než Drucker-Pragerově:



- **Ostatní podmínky plasticity**

V reakci na experimenty vzešla snaha definovat podmínky porušení jež vystihují experimentální data, tedy takové jež jsou obdobné Mohr-Coulombově podmínce, nemají však singularity ("hrany")

Mezi nejúspěšnější patří:

- ★ **Podmínka Matsuoka-Nakai**

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{I_1}{I_2 I_3} + \frac{\cos^2 \varphi}{9 - \sin^2 \varphi} = 0$$

I_1 , I_2 a I_3 jsou invarianty tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$. Podmínka dává stejný úhel vnitřního tření φ při triaxiálním stlačení a roztažení a o něco vyšší φ pro ostatní stavy napjatosti.

★ Ladeho podmínka

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m = 0$$

m je materiálový parametr, p_a je referenční napětí (atmosférický tlak). Podmínka predikuje vyšší úhel vnitřního tření pro triaxiální roztahení než pro triaxiální stlačení (viz. obr. ←).

Rychlost plastického přetvoření

Z přírůstkové (rychlostní) formulace elasto-plastického modelu

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M}^{ep} : \dot{\epsilon} = \mathcal{M}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p)$$

vyplývá, že model je *plně definovaný* pokud známe buď rychlost plastického přetvoření $\dot{\epsilon}^p$, či elasto-plastickou matici \mathcal{M}^{ep} .

Z předešlého vyplývá, že $\dot{\epsilon}^p$ (či \mathcal{M}^{ep}) hledáme pouze pokud podmínka plastického zatěžování indikuje elasto-plastickou deformaci. Jinak $\dot{\epsilon}^p = \mathbf{0}$ a $\mathcal{M}^{ep} = \mathcal{M}^e$.

Rychlost plastického přetvoření

Nejprve budeme studovat, jak zjistíme rychlost plastického přetvoření $\dot{\epsilon}^p$. Rychlost plastického přetvoření vypočteme pomocí:

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \mathbf{m}$$

Kde tenzor \mathbf{m} udává její směr a skalární veličina λ (nazývaná *plastický násobitel*) její velikost.

Plastický potenciál

Pro výpočet směru plastického přetvoření \mathbf{m} definujeme tzv. *plochu plastického potenciálu* $g(\boldsymbol{\sigma})$.

Směr plastického přetvoření je roven normále na plochu plastického potenciálu

tedy

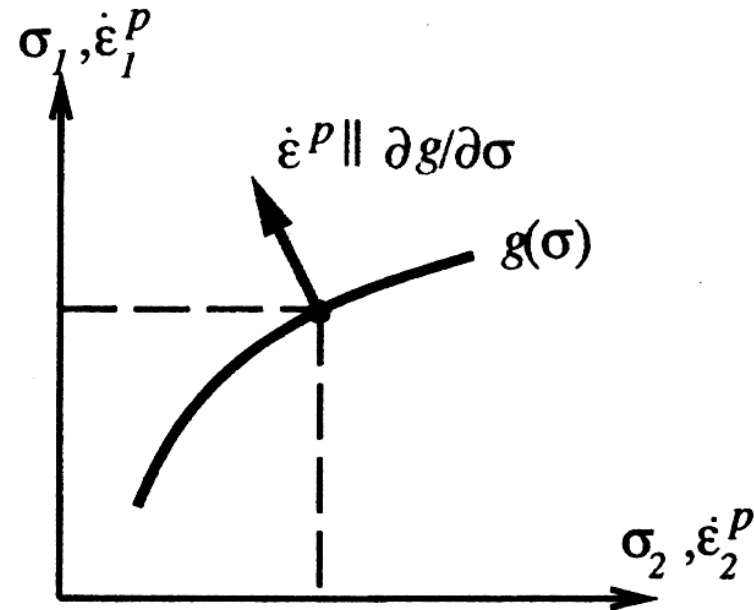
$$\mathbf{m} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Je tedy zřejmé, že směr přírůstku plastického přetvoření závisí pouze na aktuálním stavu napjatosti $\boldsymbol{\sigma}$, ne na rychlosti napětí $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

Rovnice pro \mathbf{m} se nazývá *zákon tečení* (*flow rule*).

Plastický potenciál

Význam plastického potenciálu je demonstrován na obrázku:



Je zřejmé, že vhodně zvolený plastický potenciál umožňuje simulovat jak kontraktanci, tak dilatanci zeminy.

Sdružená a nesdružená plasticita

Pokud je funkce plastického potenciálu $g(\boldsymbol{\sigma})$ shodná s podmínkou plasticity $f(\boldsymbol{\sigma})$, hovoříme o tzv. *sdružené plasticitě* (*associated plasticity*), v opačném případě o *nesdružené plasticitě* (*non-associated plasticity*).

Modely sdružené plasticity jsou výhodnější z matematického hlediska (např. mají symetrickou matici tuhosti \mathcal{M}^{ep}). Pro zeminy se používají oba typy modelů, velmi obecně se dá říci že modely sdružené plasticity jsou dostatečné pro simulování chování jílu, nesdružená plasticita se využívá pro simulaci chování zrnitých materiálů (písky, . . .).

Plastický násobitel λ

Zopakujme, že rychlost plastického přetvoření vypočítáme pomocí

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \mathbf{m} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Velikost *plastického násobitele* λ určíme z tzv. *podmínky konzistence*, jež stanovuje, že

Při elasto-plastickém přitěžování musí napětí zůstat na ploše plasticity, tedy po přírůstku přetvoření musí stále platit $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Plastický násobitel λ

Pro ideálně plastický model lze podmínku konzistence zapsat matematicky jako

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$

(Tenzor \mathbf{n} je definujeme jako gradient podmínky plasticity $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$).

Protože

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$$

můžeme podmínku konzistance zapsat

$$\mathbf{n} : [\mathcal{M}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)] = 0$$

Dosadíme vztah pro výpočet rychlosti plastického přetvoření $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ a získáme

$$\mathbf{n} : [\mathcal{M}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \lambda \mathbf{m})] = 0$$

Plastický násobitel λ

Což (s využitím tenzorového počtu, viz. přednášky, část 1.) můžeme rozepsat jako

$$\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \lambda \mathbf{m} = 0$$

tedy

$$\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \lambda (\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m})$$

z čehož získáme vztah pro plastický násobitel λ :

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Elasto-plastická matice tuhosti \mathcal{M}^{ep}

Vztah pro elasto-plastickou matici tuhosti \mathcal{M}^{ep} získáme dosazením výrazu pro rychlost plastického přetvoření $\dot{\epsilon}^p$ do přírůstkové formulace elasto-plastického modelu:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M}^e : \left[\dot{\epsilon} - \left(\frac{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} : \dot{\epsilon} \right) \mathbf{m} \right] =$$

$$\mathcal{M}^e : \dot{\epsilon} - \mathcal{M}^e : \left(\frac{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon}}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} \right) \mathbf{m} =$$

$$\mathcal{M}^e : \dot{\epsilon} - \frac{1}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} [(\mathcal{M}^e : \mathbf{m}) (\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon})]$$

Elasto-plastická matice tuhosti \mathcal{M}^{ep}

Nyní můžeme využít pravidlo, jež jsme si prokázali v přednáškách, část 1:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{B}$$

na rovnici

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} [(\mathcal{M}^e : \mathbf{m}) (\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}})]$$

Elasto-plastická matice tuhosti \mathcal{M}^{ep}

Nyní můžeme využít pravidlo, jež jsme si prokázali v přednáškách, část 1:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{B}$$

na rovnici

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} \left[\underbrace{(\mathcal{M}^e : \mathbf{m})}_{\mathbf{C}} \left(\underbrace{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e}_{\mathbf{A}} : \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\mathbf{B}} \right) \right]$$

Můžeme tedy psát

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} [(\mathcal{M}^e : \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{n} : \mathcal{M}^e)] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Elasto-plastická matice tuhosti \mathcal{M}^{ep}

Výraz můžeme sloučit na

$$\dot{\sigma} = \left[\mathcal{M}^e - \frac{(\mathcal{M}^e : \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{n} : \mathcal{M}^e)}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} \right] : \dot{\epsilon}$$

Porovnáním s

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M}^{ep} : \dot{\epsilon}$$

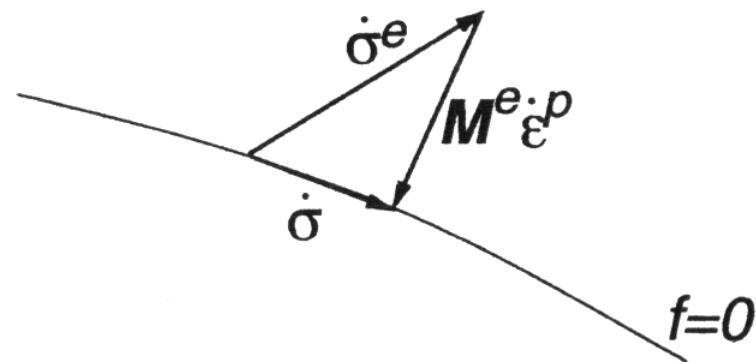
zjistíme výraz pro elasto-plastickou matici tuhosti

$$\mathcal{M}^{ep} = \mathcal{M}^e - \frac{(\mathcal{M}^e : \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{n} : \mathcal{M}^e)}{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}}$$

Pružný prediktor a plastický korektor

Význam přírůstku plastického přetvoření $\dot{\epsilon}^p$ v elasto-plastickém konstitučním vzathu lze demonstrovat následovně:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon} - \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon}^p = \dot{\sigma}^e - \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon}^p$$



$\dot{\sigma}^e$ nazýváme *pružný prediktor* přírůstku napětí a $\mathcal{M}^e : \dot{\epsilon}^p$ *plastický korektor*.

Mohr-Coulombův konstituční model

Z předchozího vyplývá, že *ideálně plastický* konstituční model je plně specifikován pomocí:

- Elastické matice tuhosti \mathcal{M}^e
- Podmínky plasticity $f(\boldsymbol{\sigma})$
- Plastického potenciálu $g(\boldsymbol{\sigma})$

Mohr-Coulombův konstituční model je nejpoužívanějším *ideálně plastickým* konstitučním modelem v geomechanice.

- Elastická matice tuhosti \mathcal{M}^e Mohr-Coulombova konstitučního modelu odpovídá *lineární isotropní* elasticitě. Chování uvnitř plochy plasticity je tedy kontrolováno pomocí dvou parametrů, např. E a ν (viz. lineární isotropní elasticita \leftarrow).

Mohr-Coulombův konstituční model

- Podmínka plasticity $f(\boldsymbol{\sigma})$ odpovídá *Mohr-Coulombově podmínce plasticity* (viz. \leftarrow).

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi$$

- Plastický potenciál $g(\boldsymbol{\sigma})$ má obdobnou formulaci jako podmínka plasticity:

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi$$

Parametr ψ se nazývá *úhel dilatance*. Pokud $\psi = \varphi$, jedná se o sdruženou plasticitu.

Význam parametrů Mohr-Coulombova modelu

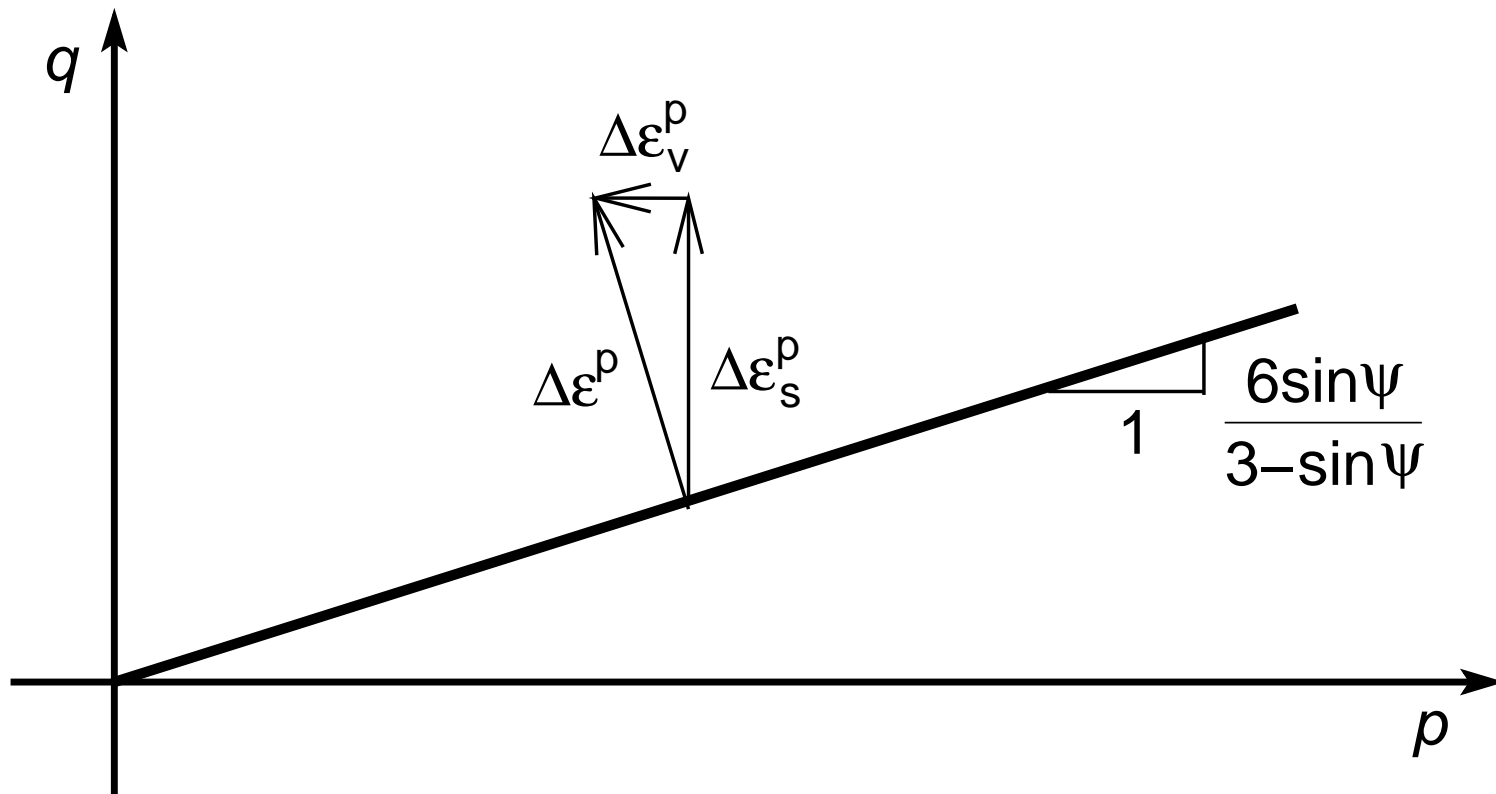
Mohr-Coulombův model tedy uvažuje 5 parametrů (E , ν , φ , c a ψ) a jednu tenzorovou stavovou proměnnou (σ). Význam prvních čtyř parametrů je zřejmý z předchozího výkladu.

Úhel dilatance ψ můžeme zjistit např. vyhodnocením standardní kompresní triaxiální zkoušky, kde platí:

$$\frac{\Delta \epsilon_v^p}{\Delta \epsilon_s^p} = \frac{6 \sin \psi}{3 - \sin \psi}$$

Význam parametrů Mohr-Coulombova modelu

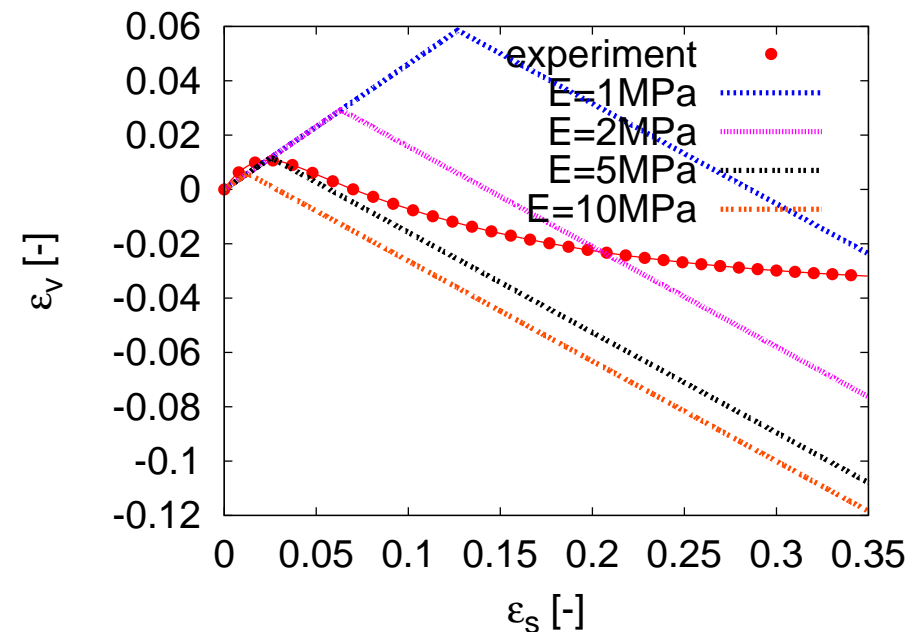
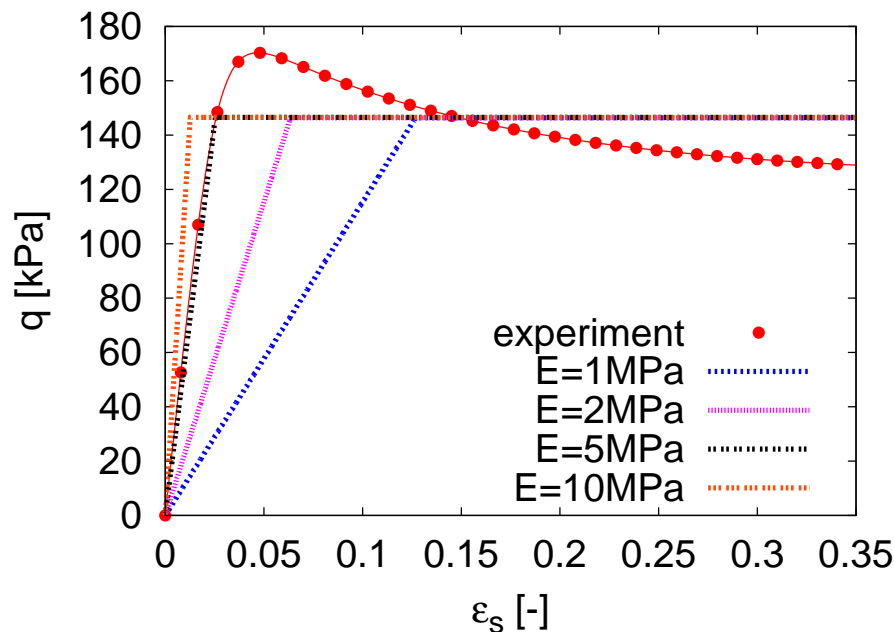
Plocha plastického potenciálu Mohr-Coulombova modelu zobrazená v prostoru daném invarianty napětí p a q :



Kalibrace Mohr-Coulombova modelu

V následujícím bude demonstrován vliv jednotlivých parametrů Mohr-Coulombova modelu na předpověď výsledků *drénované triaxiální zkoušky* a způsob kalibrace modelu.

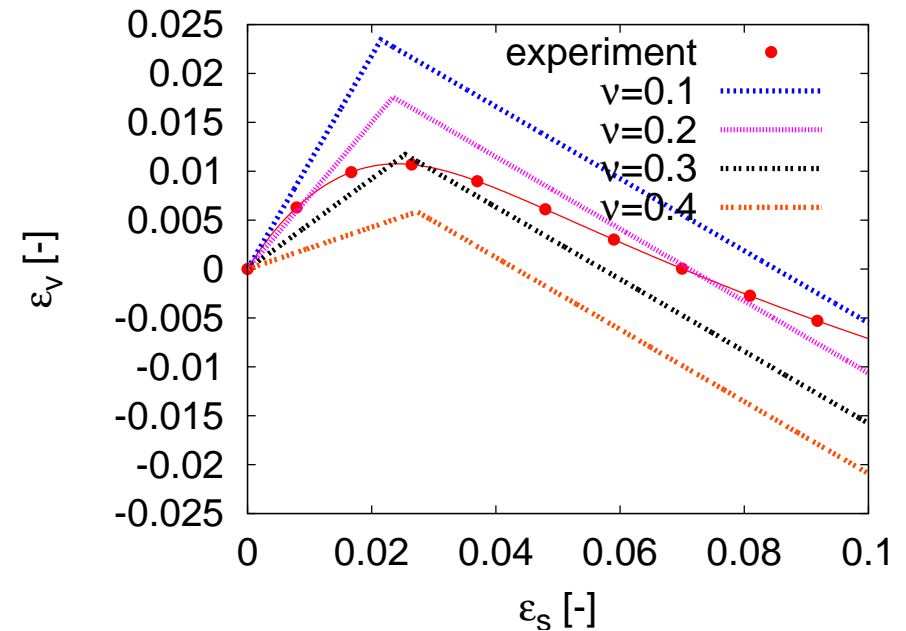
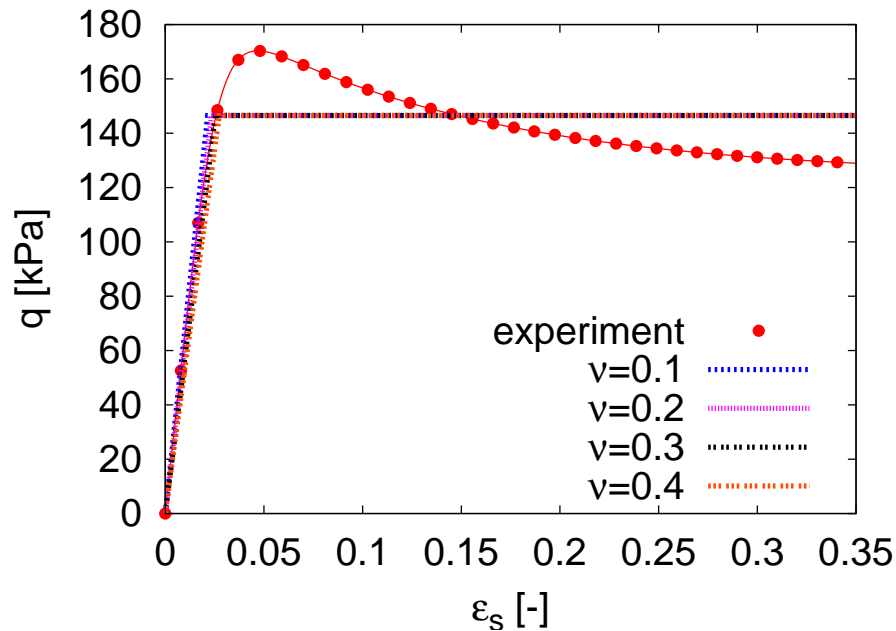
- Youngův modul E :



$\Rightarrow E \simeq 5 \text{ MPa}$.

Kalibrace Mohr-Coulombova modelu

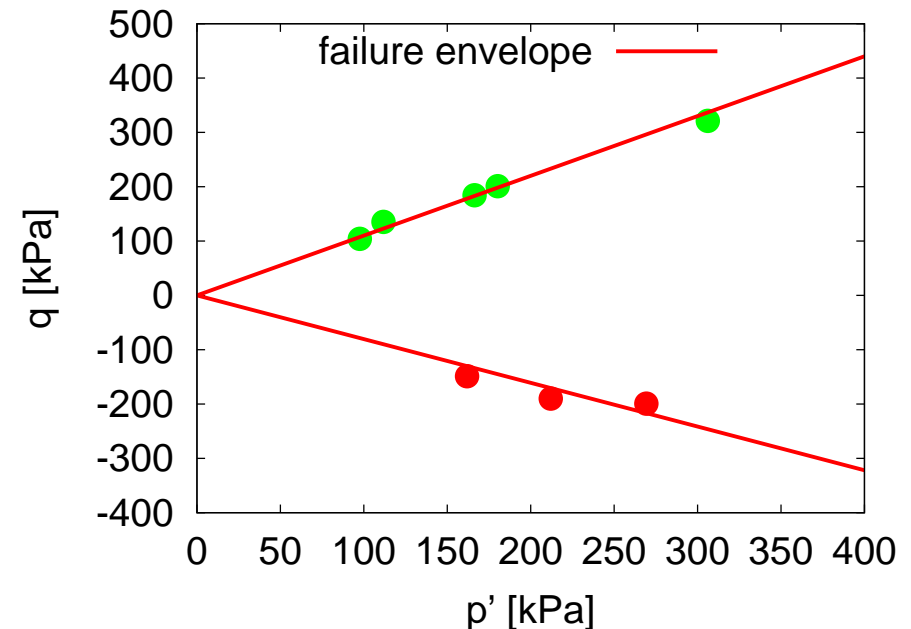
- Poissonovo číslo ν :



$\Rightarrow \nu \simeq 0.3$

Kalibrace Mohr-Coulombova modelu

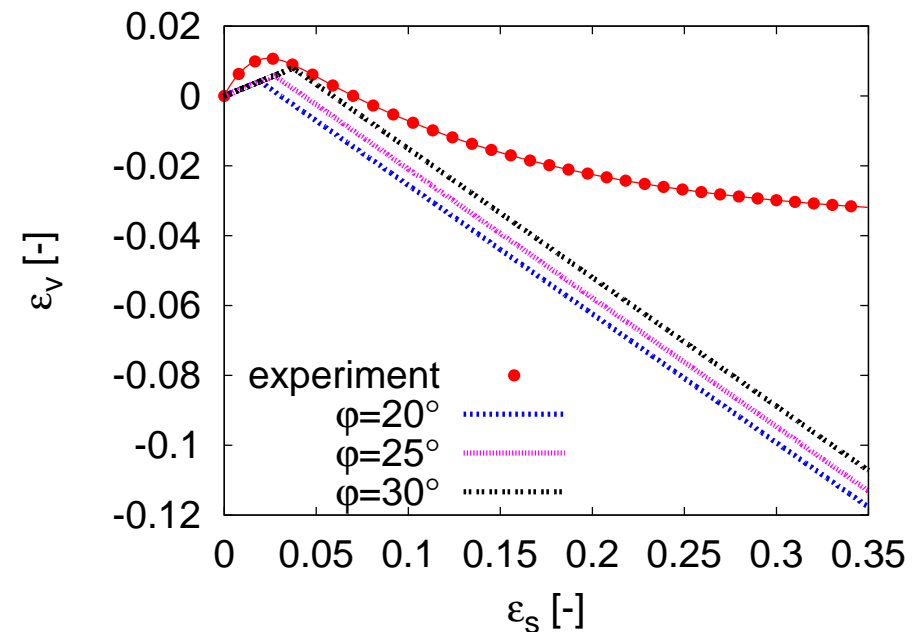
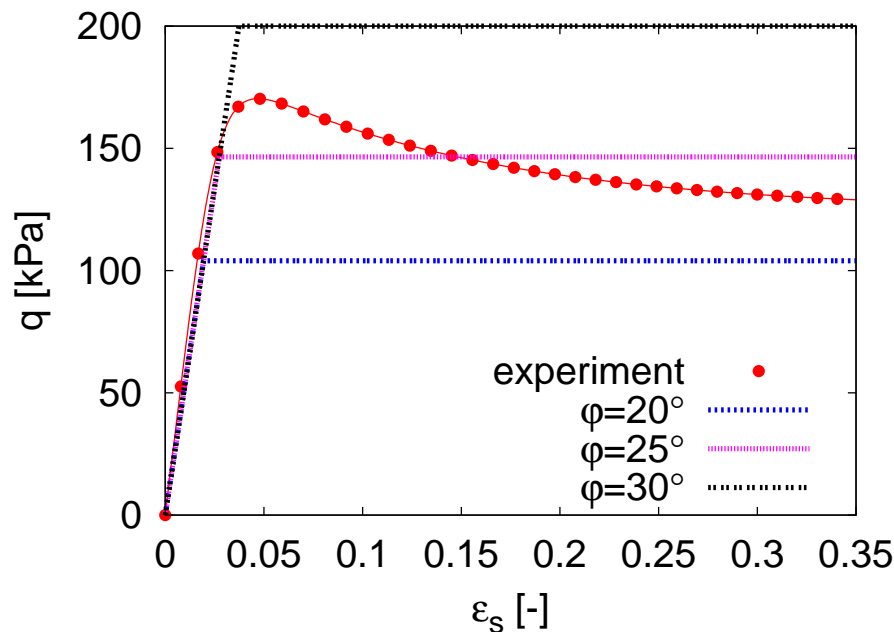
- Úhel vnitřního tření φ a efektivní soudržnost c jsou kalibrovány proložením obálky pevnosti (vyhodnocením několika smykových zkoušek).



M-C model *neumožňuje* modelovat povrchový pokles pevnosti, výběr vrcholových či kritických parametrů tedy záleží na studovaném geotechnickém problému.

Kalibrace Mohr-Coulombova modelu

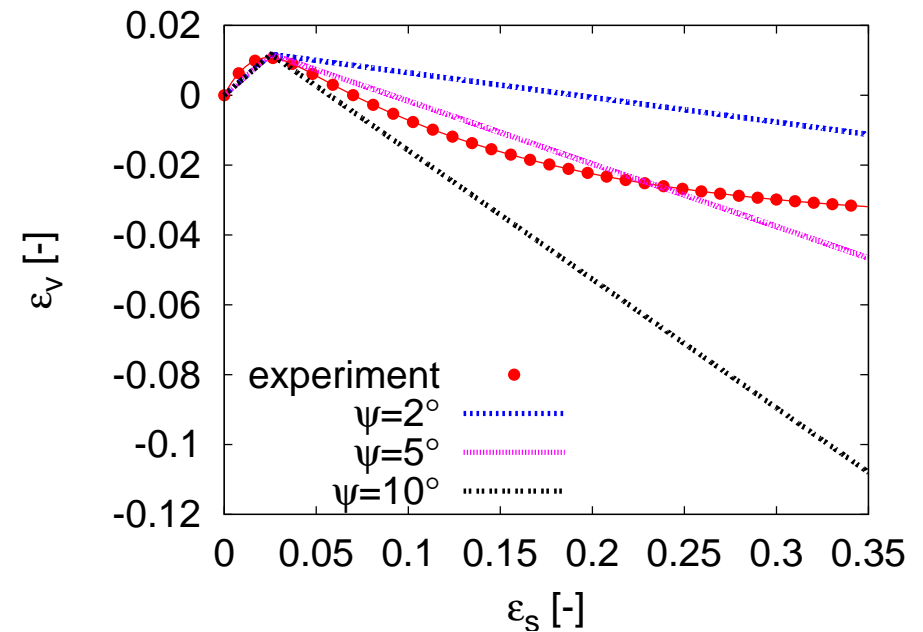
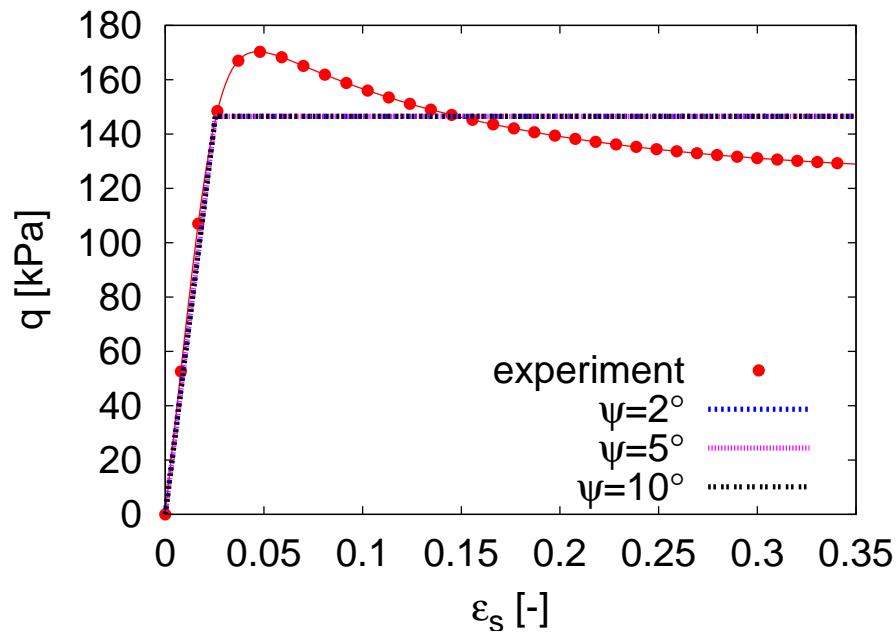
- Úhel vnitřního tření φ a efektivní soudržnost c – vliv parametrů na předpověď drénované triaxiální zkoušky (v grafech pouze vliv φ , v daném zobrazení pro jednu zkoušku je vliv c ekvivalentní).



$\Rightarrow \varphi \approx 25^\circ$

Kalibrace Mohr-Coulombova modelu

- Úhel dilatance ψ :



$$\Rightarrow \psi \approx 5^\circ$$

Shrnutí Mohr-Coulombova modelu

Model umožňuje/neumožňuje predikovat:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Pro dráhy napětí jež nevedou k obálce pevnosti (např. pro oedometrické či izotropní stlačování) predikuje model elastické chování, což není realistické.

Numerická implementace ideálně plastického modelu

”Subroutiny” definující konstituční model v programu pro numerickou metodu pracují v nejjednodušším případě následujícím způsobem:

Program předá subroutině informace o *aktuální hodnotě stavových veličin* (u ideálně plastického modelu pouze napětí σ_{init}), *rychlosti přetvoření* $\dot{\epsilon}$ a *časovém kroku* Δt

Subroutina vrátí programu *nové hodnoty stavových veličin* (u ideálně plastického modelu $\sigma_{new} = \sigma_{init} + \Delta\sigma$) a *rychlost plastického přetvoření* $\dot{\epsilon}^p$.

V nejjednodušším případě dostatečně malého časového kroku Δt probíhá numerická integrace konstitučního modelu následovně:

1. Kontrola *podmínky plastického zatěžování*

$$\text{Elastická} \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = \mathbf{0}$$

$$\text{Elasto-plastická} \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = \lambda \mathbf{m}$$

2. $\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p$

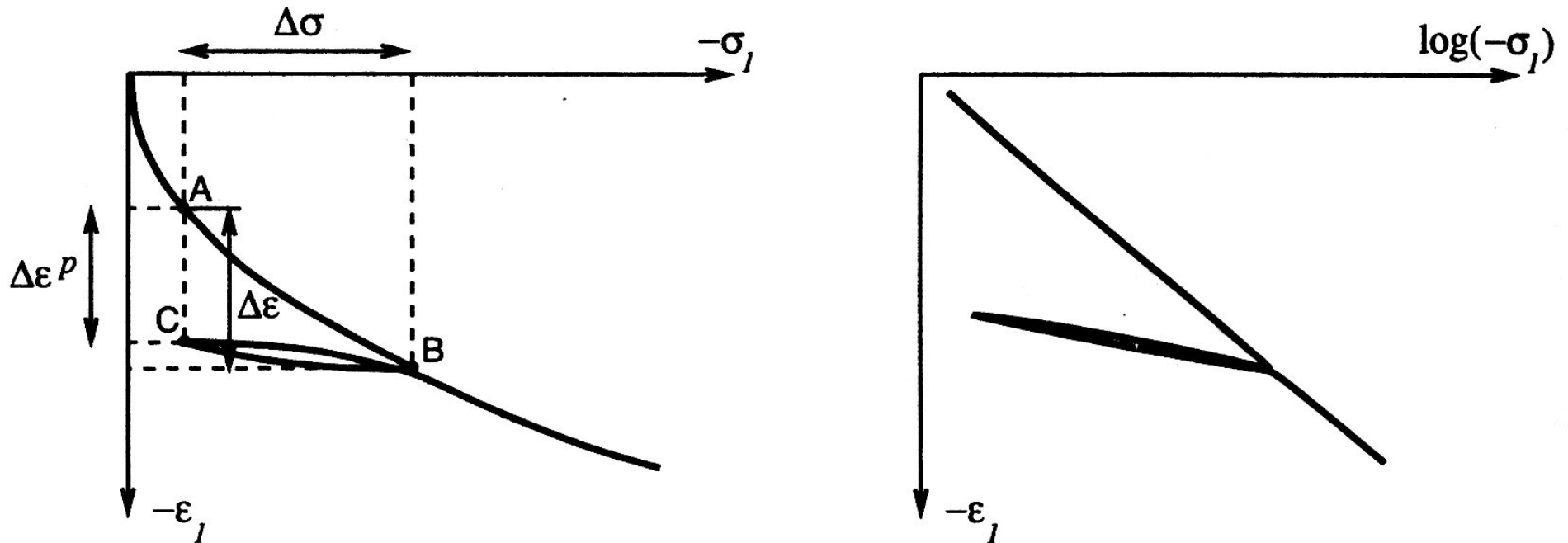
3. $\dot{\sigma} = \mathcal{M}^e : \dot{\epsilon}^e$

4. $\Delta \sigma = \Delta t \dot{\sigma}$

Plasticita se zpevněním

Ideálně plastické modely predikují plastická přetvoření pouze pro dráhy napětí vedoucí k obálce pevnosti, ostatní dráhy napětí probíhají pouze v pružném oboru.

To je v zásadním rozporu s experimentem. Plastická přetvoření vznikají i při např. oedometrické či isotropní zkoušce stlačitelnosti:

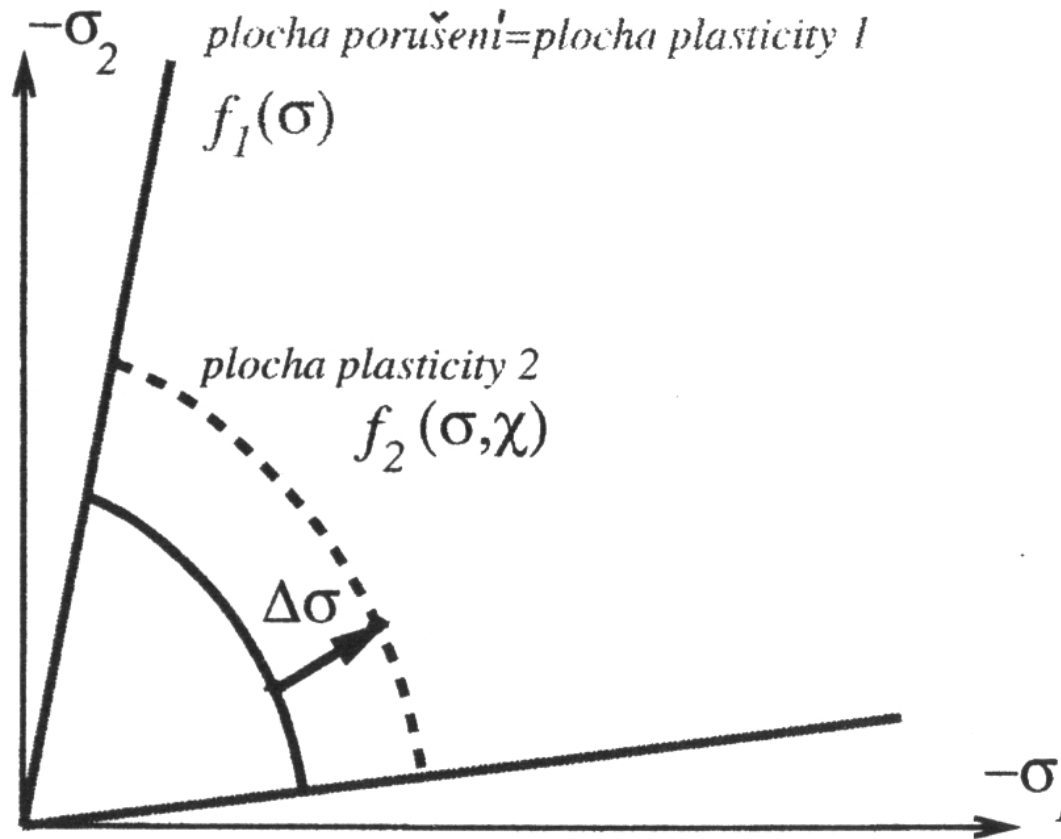


Při přetížení sleduje křivka pracovního diagramu přibližně křivku po odlehčení *až do předchozího maximálního napětí*

⇒ Zemina si "pamatuje" předchozí maximální zatížení.

Tento jev *nelze* modelovat pomocí ideálně plastických modelů, kde je plocha plasticity v prostoru napětí neměnná.

Je třeba umožnit *změnu velikosti* plochy plasticity při zatěžování



Plocha plasticity se tedy odlišuje od podmínky porušení.

Takovýto model nazýváme *plastický se zpevněním*

Na rozdíl od ideálně plastického modelu musí tento model uvažovat *další stavovou proměnou* (či stavové proměnné), která definuje aktuální tvar a velikost plochy plasticitym (např. χ). Plocha plasticity je potom funkcí $f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$. Proměnná χ se nazývá *paměťová proměnná*.

Pokud plocha plasticity pouze mění velikost při zachování svého tvaru, postačuje pro popis plochy plasticity *jediná* paměťová proměnná. Hovoříme pak o *plasticitě s izotropním zpevněním*.

Model musí definovat evoluční rovnici pro paměťovou proměnnou (viz. ← úvod do konstitučního modelování). Obvykle se uvažuje $\dot{\chi}$ funkcí rychlosti plastického přetvoření $\dot{\epsilon}^p$.

V případě, že $\dot{\chi}$ je funkcí pouze rychlosti plastického objemového přetvoření $\dot{\epsilon}_v^p$, hovoříme o *plasticitě s izotropním objemovým zpevněním*. Obdobně definujeme *smykové zpevnění* ($\dot{\chi}$ je funkcí $\dot{\epsilon}_s^p$).

Podmínka konzistence pro plasticitu se zpevněním

I přes to, že plocha plasticity není u plastického modelu se zpevněním konstantní v prostoru napětí, musí stejně jako u ideálně plastického modelu platit $f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0$.

Je nutno modifikovat vztah pro výpočet plastického násobitele λ . Podmínka konzistence má nyní tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} = 0$$

V případě, že $\dot{\chi}$ je pouze funkcí $\dot{\epsilon}^p$, můžeme psát

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} : \dot{\epsilon}^p = 0$$

Platí tedy (viz. ← ideální plasticita)

$$\mathbf{n} : [\mathcal{M}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \lambda \mathbf{m})] + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} : \lambda \mathbf{m} = 0$$

$$\mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \lambda \mathbf{m} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} : \mathbf{m} = 0$$

z čehož získáme vztah pro plastický násobitel λ pro plasticitu se zpevněním:

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e}{-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p} : \mathbf{m} + \mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Modul plasticity

Skalární proměnnou

$$H = - \frac{\partial f}{\partial \epsilon^p} : \mathbf{m}$$

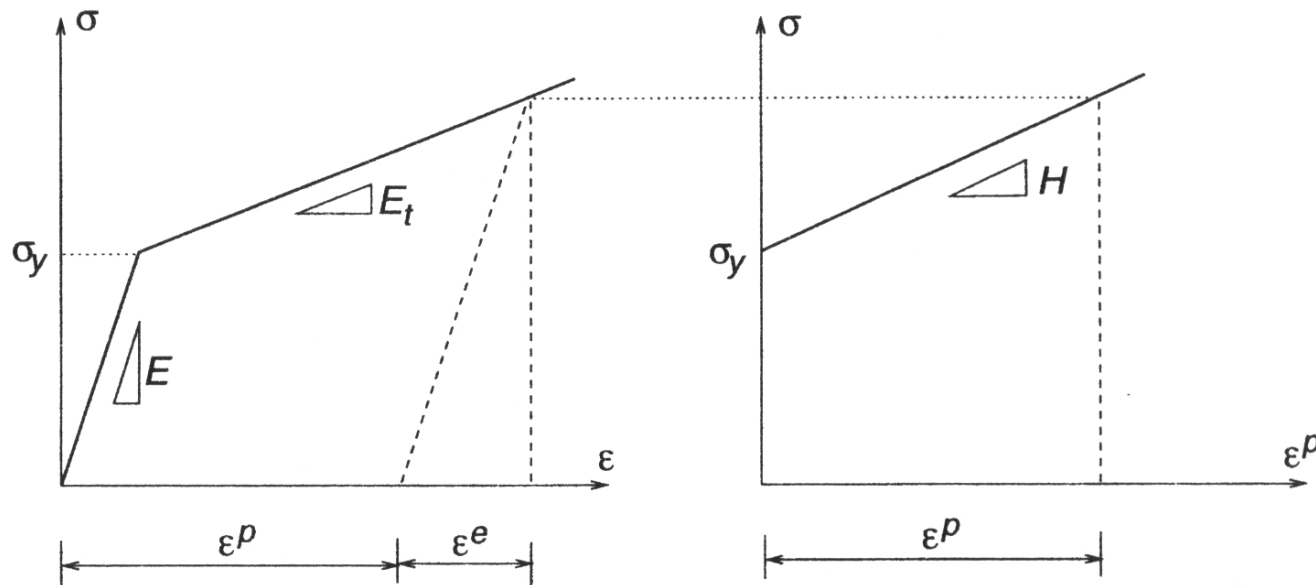
nazýváme *modul plasticity*.

Plastický násobitel λ tedy můžeme vyjádřit jako

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} : \mathcal{M}^e}{H + \mathbf{n} : \mathcal{M}^e : \mathbf{m}} : \dot{\epsilon}$$

Význam modulu plasticity

Význam modulu plasticity je pro jednorozměrný případ demonstrován na následujícím obrázku:



Je zřejmé, že pružné chování lze definovat pomocí $H \rightarrow \infty$ a ideálně plastické jako $H = 0$. S pomocí modulu plasticity lze také modelovat povrchové změkčení materiálu ($H < 0$).

Model Cam jílu (*Modified Cam clay*)

Nejpopulárnější pružno-plastický konstituční model s izotropním zpevněním pro zeminy.

Vyvinut v šedesátých letech minulého století v Cambridge. Bezpochyby se jedná o mezník v moderní mechanice zemin.

Jedná se o první model v těchto přednáškách jež uvažuje pórovitost (nebo, ekvivalentně, překonsolidační napětí) jako stavovou proměnnou. Má v sobě zahrnutu *koncepti kritických stavů* i *mezní plochu* (viz. ← úvod do chování zemin).

⇒ Model umožňuje modelovat zeminy s různou pórovitostí pomocí jedné sady parametrů (na rozdíl od Mohr-Coulombova modelu).

Zopakujme, že elasto-plastický konstituční model se zpevněním je plně definován pomocí:

- Elastické matice tuhosti \mathcal{M}^e
- Podmínky plasticity $f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$
- Plastického potenciálu $g(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$
- Evolučními rovnicemi pro stavové proměnné $\dot{\chi}$

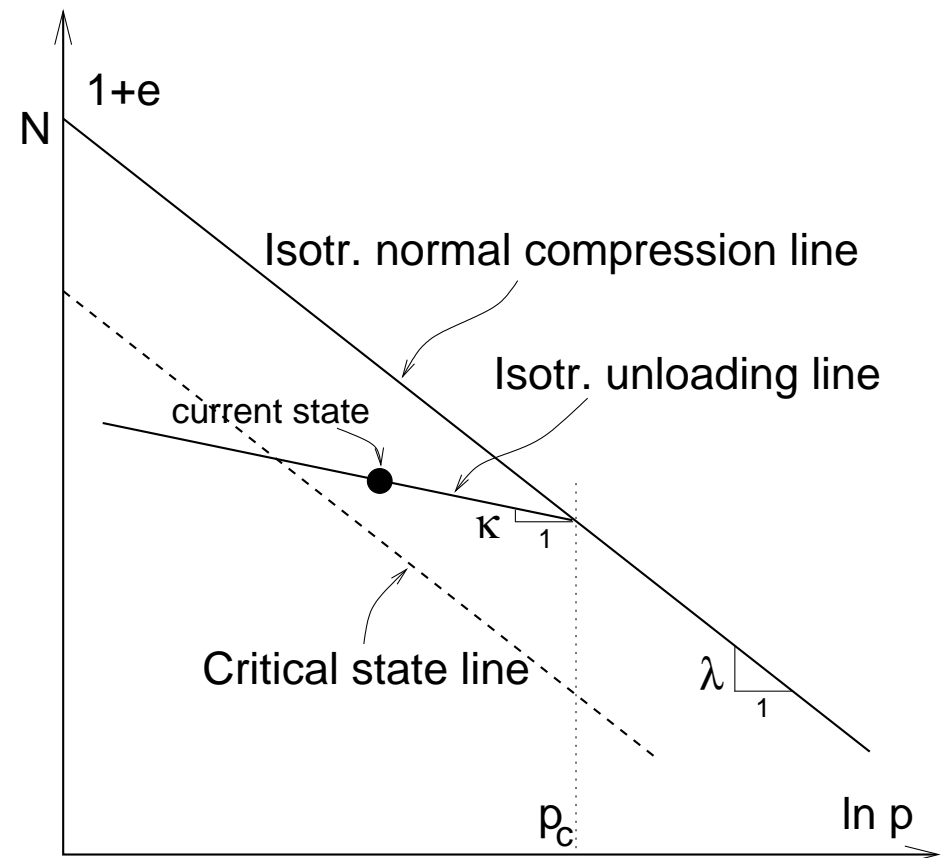
Model Cam jílu uvažuje číslo pórovitosti e jako stavovou proměnnou (χ v obecném zápisu \uparrow). Její evoluční rovnice je tedy dána jednoduše jako

$$\dot{e} = -(1 + e)\dot{\epsilon}_v$$

Elastická matice tuhosti \mathcal{M}^e

Model Cam jílu uvažuje *nelineární izotropní elasticitu* s *konstantním smykovým modulem G* (jenž je parametrem modelu) a objemovým modulem K závislým na napětí a pórovitosti.

Pro výpočet objemového modulu K definujeme *parametr κ* jako směrnici čáry odlehčení v grafu $\ln p : (1 + e)$



Matematicky čáru odlehčení zapíšeme jako

$$1 + e = \text{const.} - \kappa \ln p$$

Již lze zapsat přírůstkově jako

$$\dot{e} = -\frac{\kappa}{p} \dot{p}$$

Protože

$$\dot{e} = -(1 + e)\dot{\epsilon}_v$$

tak máme

$$(1 + e)\dot{\epsilon}_v = \frac{\kappa}{p} \dot{p}$$

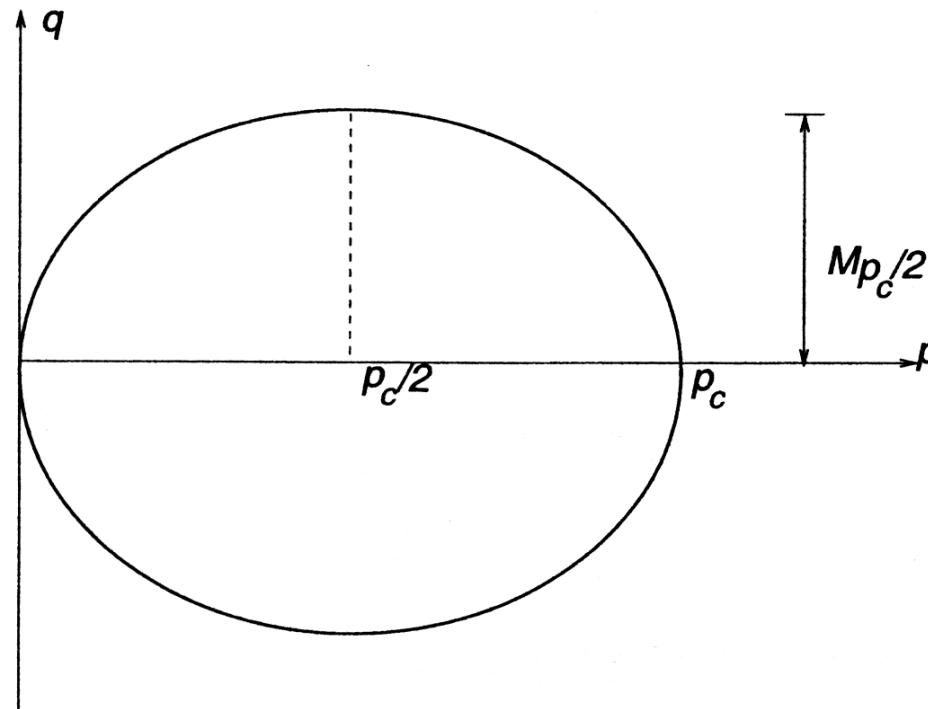
Z čehož získáme výraz pro objemový modul K

$$K = \frac{\dot{p}}{\dot{\epsilon}_v} = \frac{(1 + e)p}{\kappa}$$

Je zřejmé že *pórovitost* e je uvažována jako *stavová proměnná*.

Podmínka plasticity $f(\sigma, e)$

Plocha plasticity $f(\sigma, e) = 0$ má v prostoru invariantů napětí $p : q$ tvar elipsy:



o rovnici

$$f = q^2 + M^2 p^2 - M^2 p p_c$$

Ve výrazu

$$f = q^2 + M^2 p^2 - M^2 p p_c$$

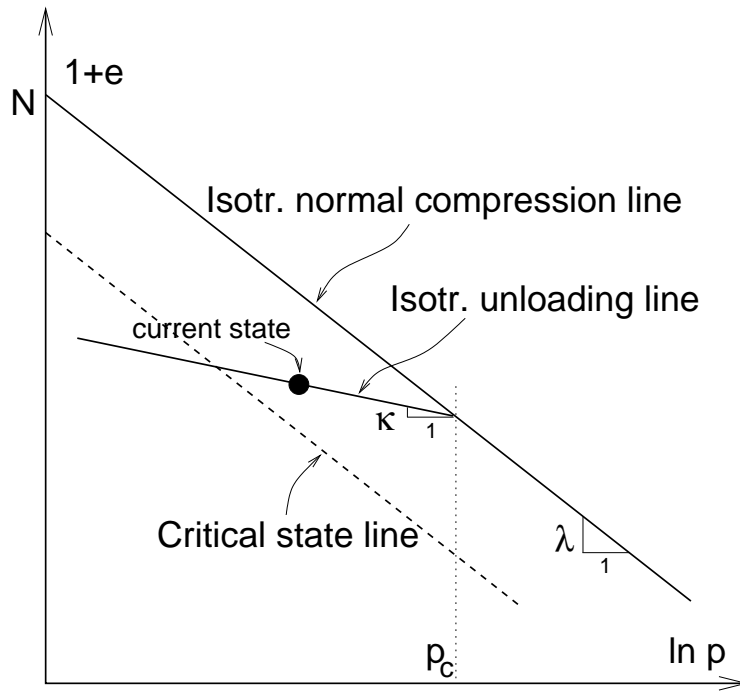
Jsou zavedeny dvě nové skalární veličiny: M a p_c .

- M je *parametr modelu* jež definuje směrnici čáry kritických stavů v prostoru invariantů napětí $p : q$. Kritické stavy jsou v prostoru napětí definovány podmínkou shodnou s Drucker-Pragerovou podmínkou plasticity. Pro triaxiální stlačení tedy platí

$$M = \frac{6 \sin \varphi_c}{3 - \sin \varphi_c}$$

Kde φ_c je kritický úhel vnitřního tření.

- p_c je *překonsolidační napětí*, viz. obr.:



Z obrázku vyplývá, že existuje přímá závislost mezi překonsolidačním napětím p_c a stavovou proměnnou e , s využitím *parametrů λ a N* , jejichž význam je z obrázku také zřejmý.

Snadno lze ukázat, že:

$$p_c = \exp \left(\frac{1 + e - N + \kappa \ln p}{\kappa - \lambda} \right)$$

Překonsolidační napětí p_c je někdy uvažováno jako stavová proměnná místo čísla pórovitosti e . Vzhledem k přímému vztahu mezi p_c a e jsou *obě formulace (pomocí p_c a e) ekvivalentní!*

Rychlost p_c zjistíme z formulace čáry normální stlačitelnosti (viz. ←)

$$1 + e = N - \lambda \ln p_c$$

Již lze zapsat přírůstkově jako

$$\dot{e} = - \frac{\lambda}{p_c} \dot{p}_c$$

Platí tedy

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\lambda}{p_c(1 + e)} \dot{p}_c$$

Do výrazu

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p$$

Lze dosadit vyjádření pro elastické objemové přetvoření (\leftarrow)

$$\frac{\lambda}{p_c(1+e)} \dot{p}_c = \frac{\kappa}{p_c(1+e)} \dot{p}_c + \dot{\epsilon}_v^p$$

Z čehož získáme

$$\dot{p}_c = \frac{p_c(1+e)}{\lambda - \kappa} \dot{\epsilon}_v^p$$

Model Cam jílu je vyvinut v rámci

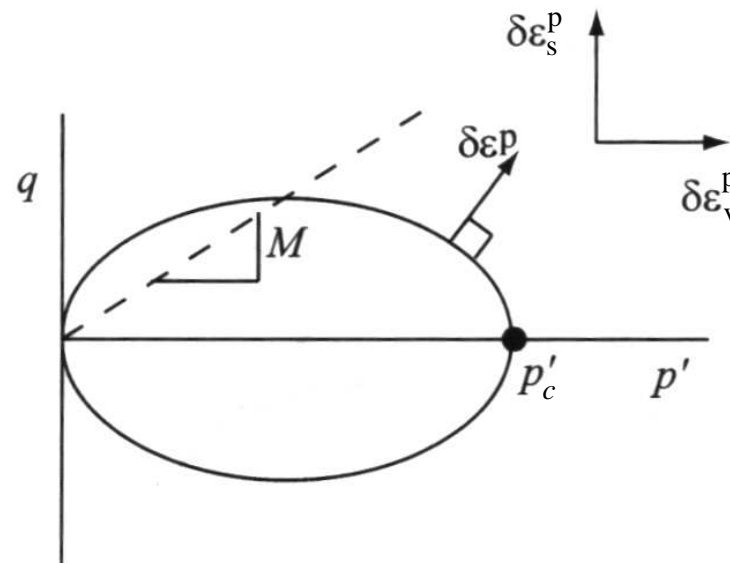
plasticity s izotropním objemovým zpevněním .

Plastický potenciál $g(\boldsymbol{\sigma}, e)$

Model Cam jílu je vyvinut v rámci sdružené plasticity, plastický potenciál $g(\boldsymbol{\sigma}, e) = 0$ je tedy shodný s podmínkou plasticity $f(\boldsymbol{\sigma}, e) = 0$:

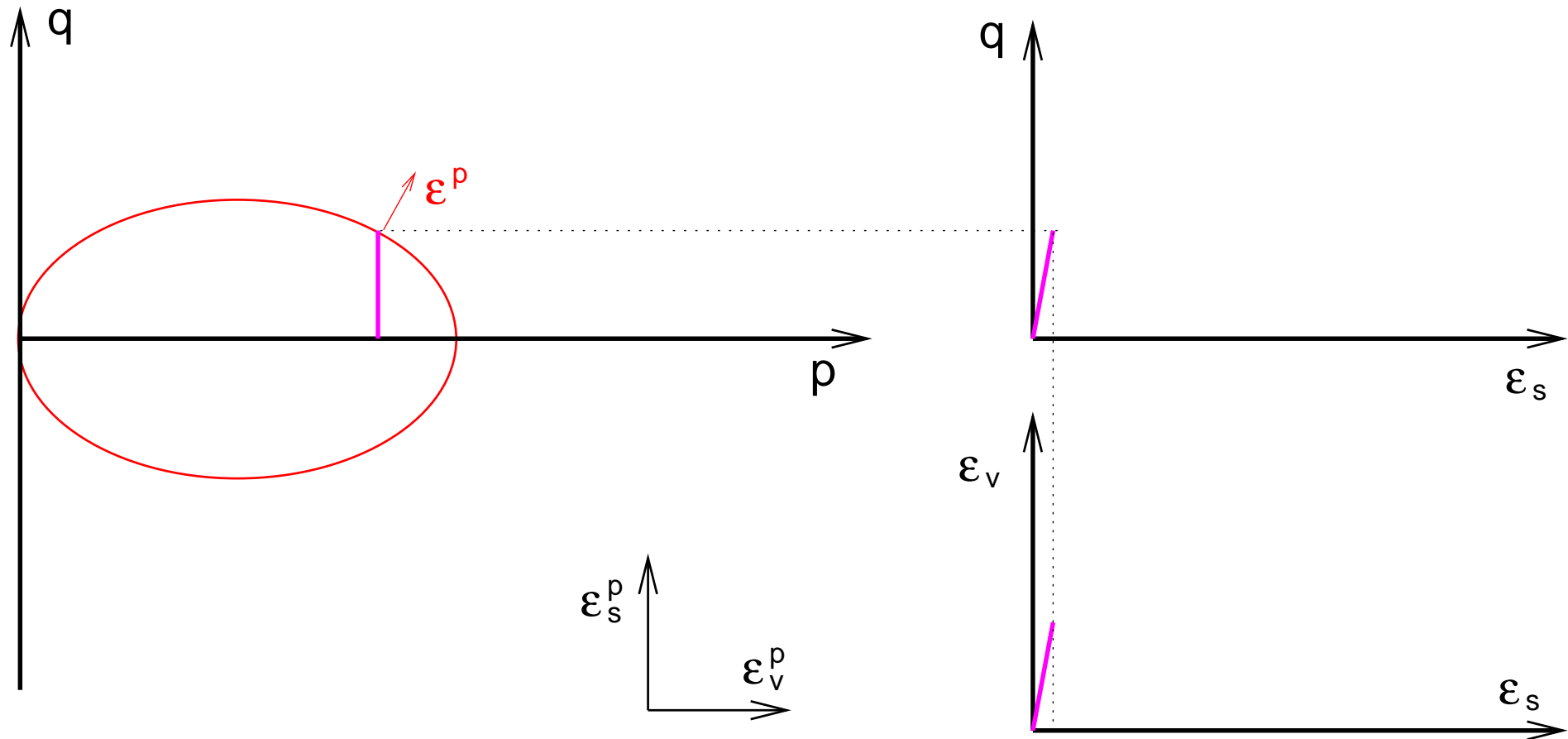
$$g = q^2 + M^2 p^2 - M^2 p p_c$$

Směr přírůstku plastického přetvoření lze tedy graficky znázornit následovně:



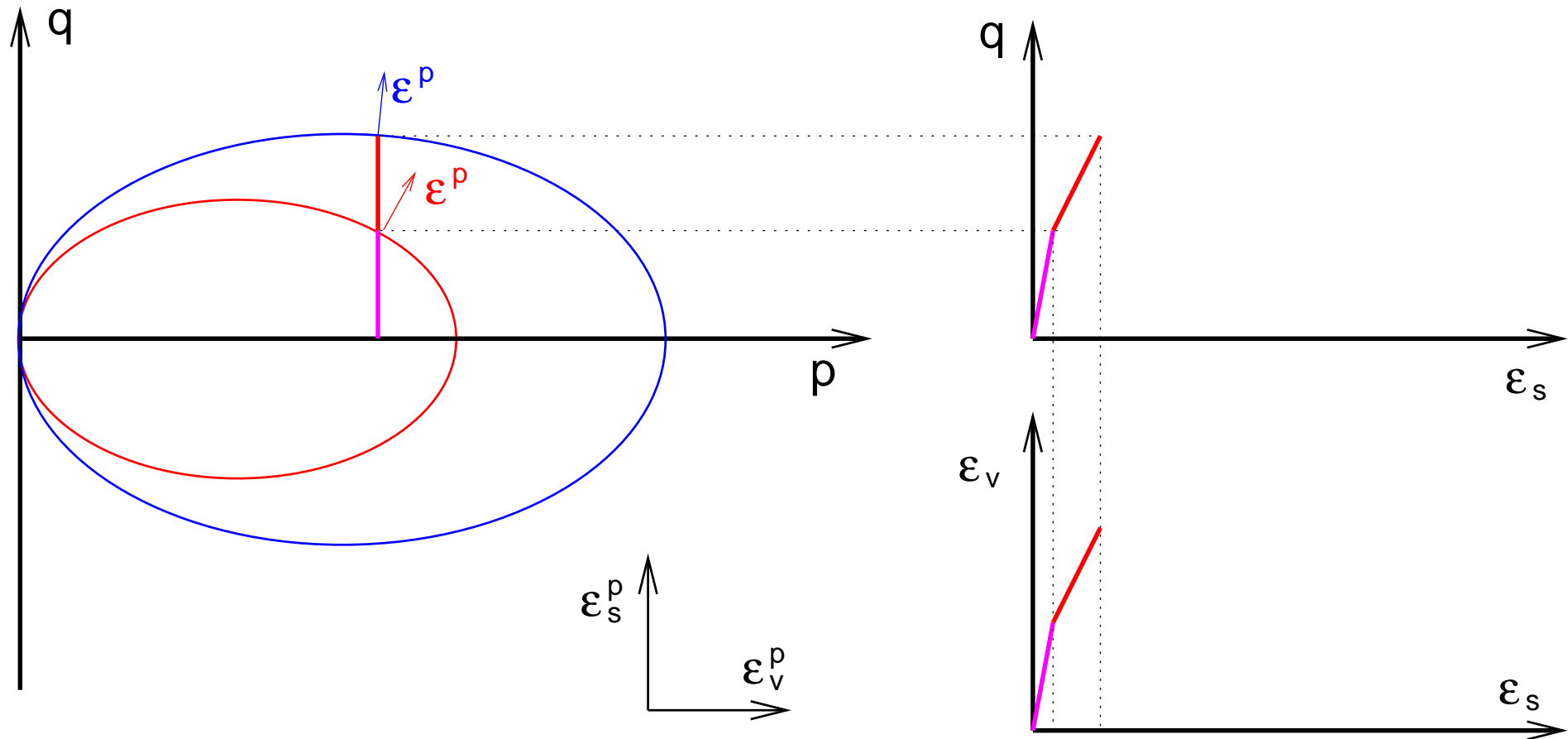
Předpověď kritických stavů

a) Mírně překonsolidovaná (kyprá) zemina



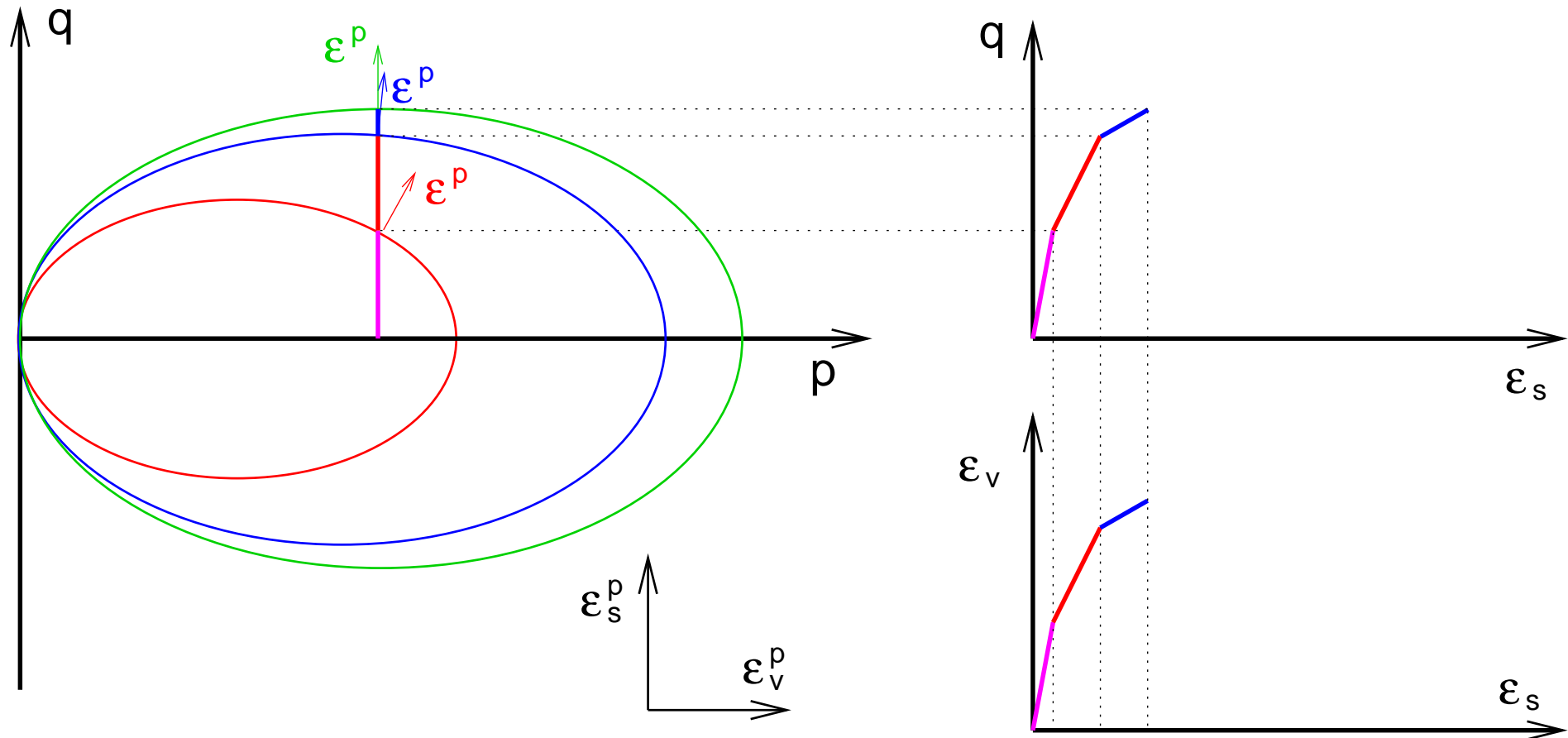
Předpověď kritických stavů

a) Mírně překonsolidovaná (kyprá) zemina



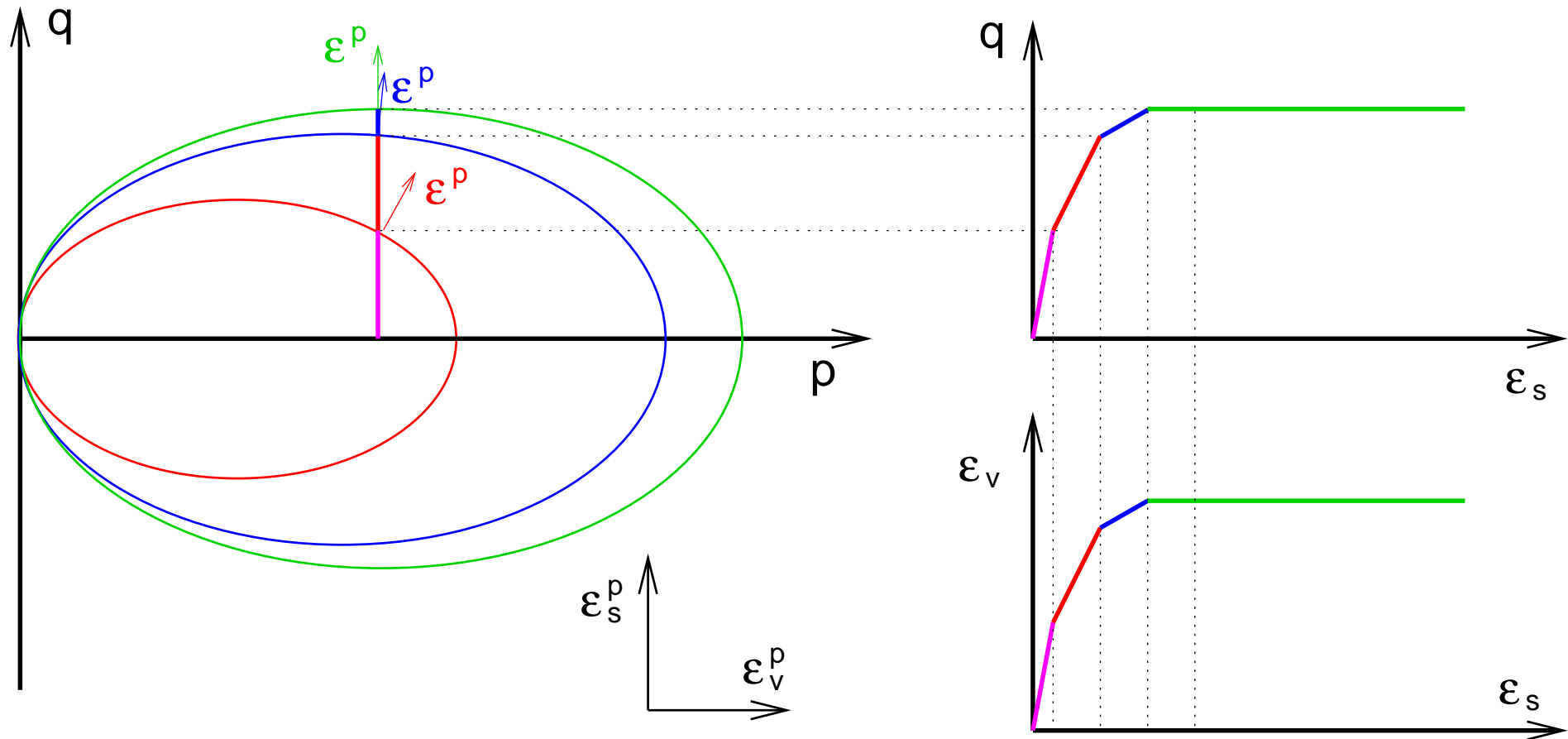
Předpověď kritických stavů

a) Mírně překonsolidovaná (kyprá) zemina



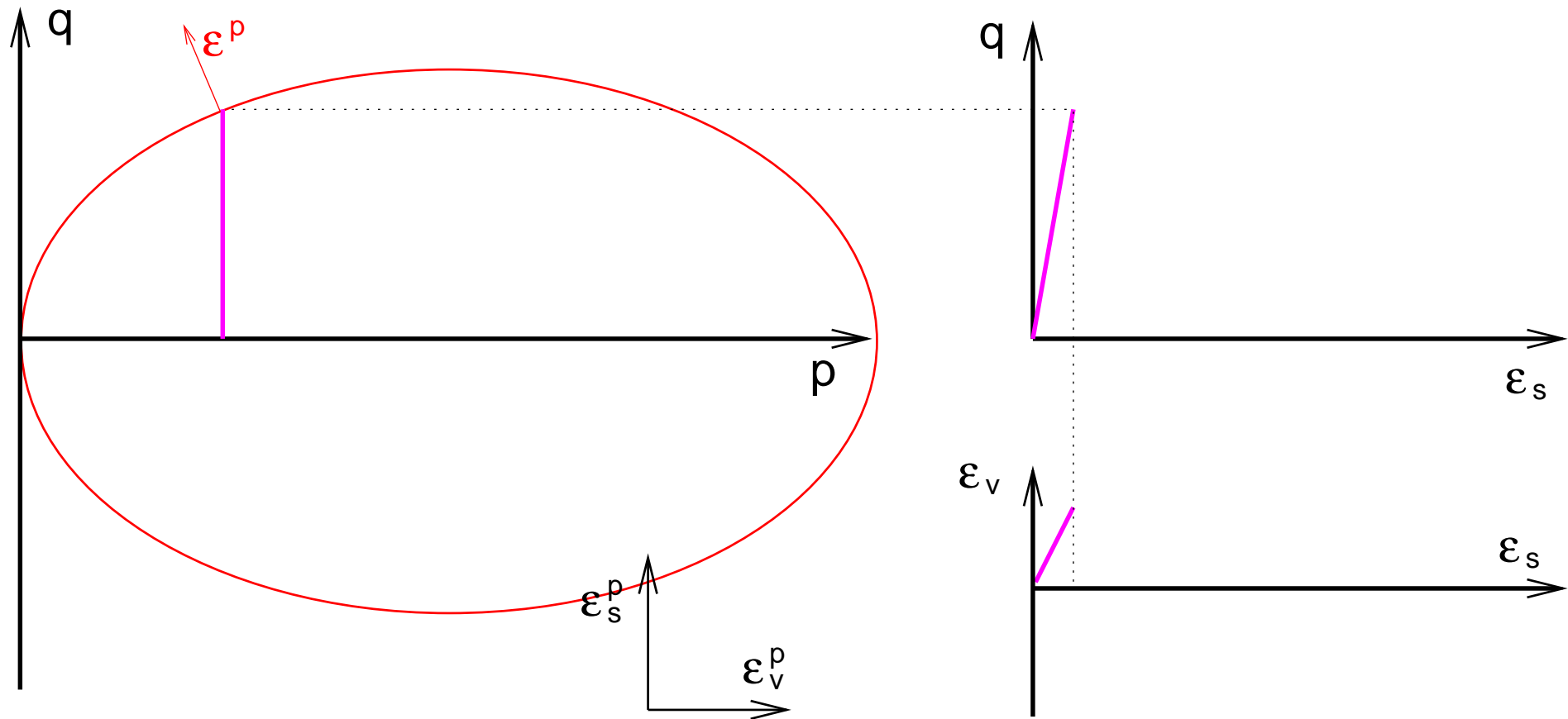
Předpověď kritických stavů

a) Mírně překonsolidovaná (kyprá) zemina



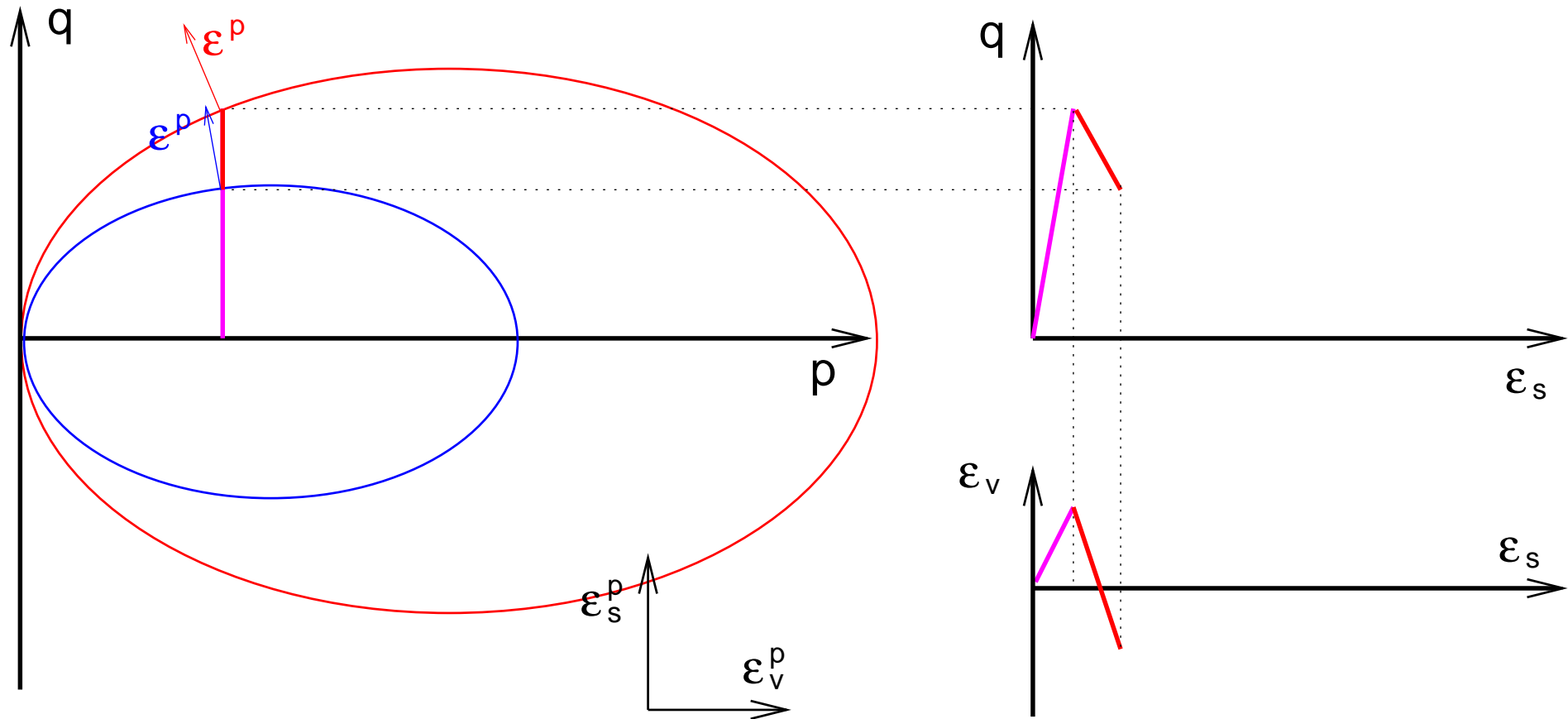
Předpověď kritických stavů

b) Silně překonsolidovaná (hutná) zemina



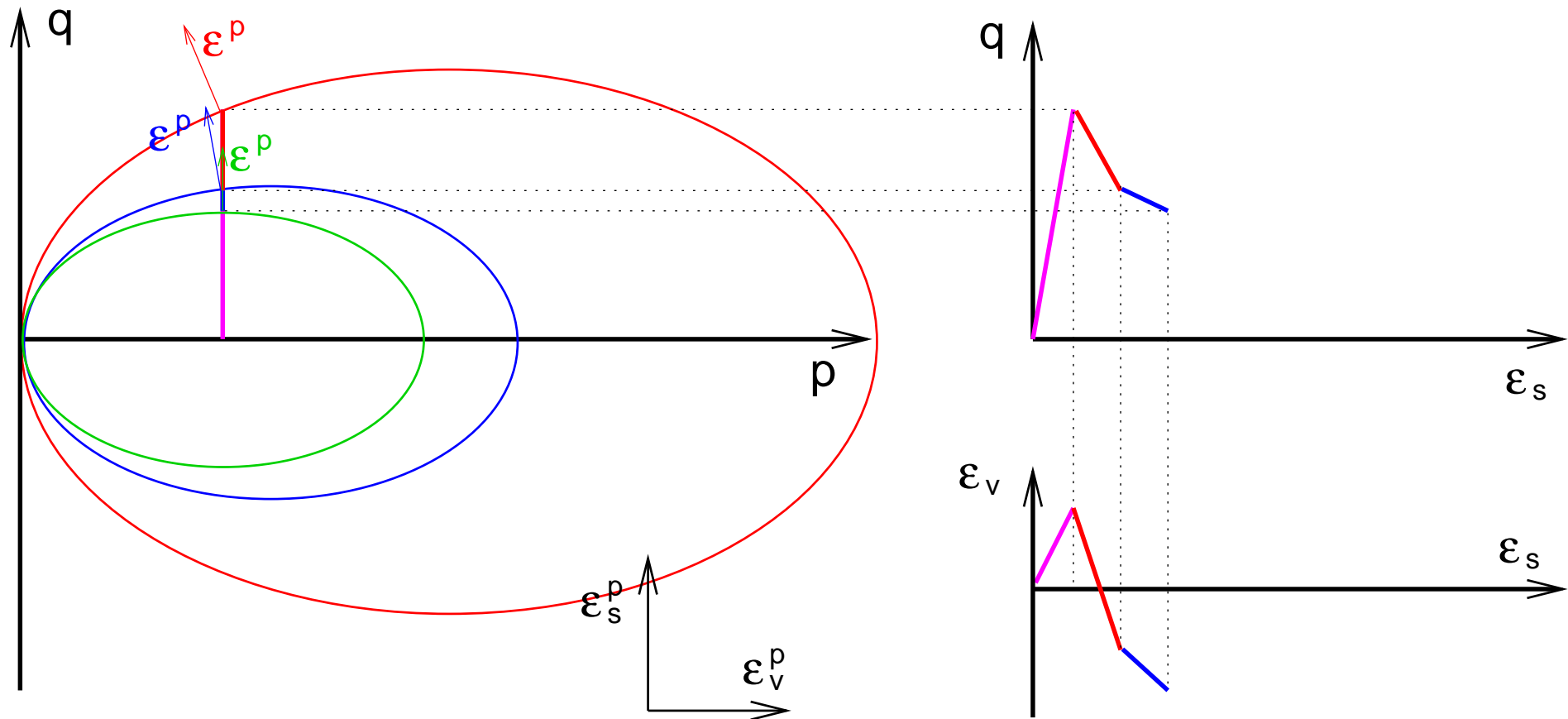
Předpověď kritických stavů

b) Silně překonsolidovaná (hutná) zemina



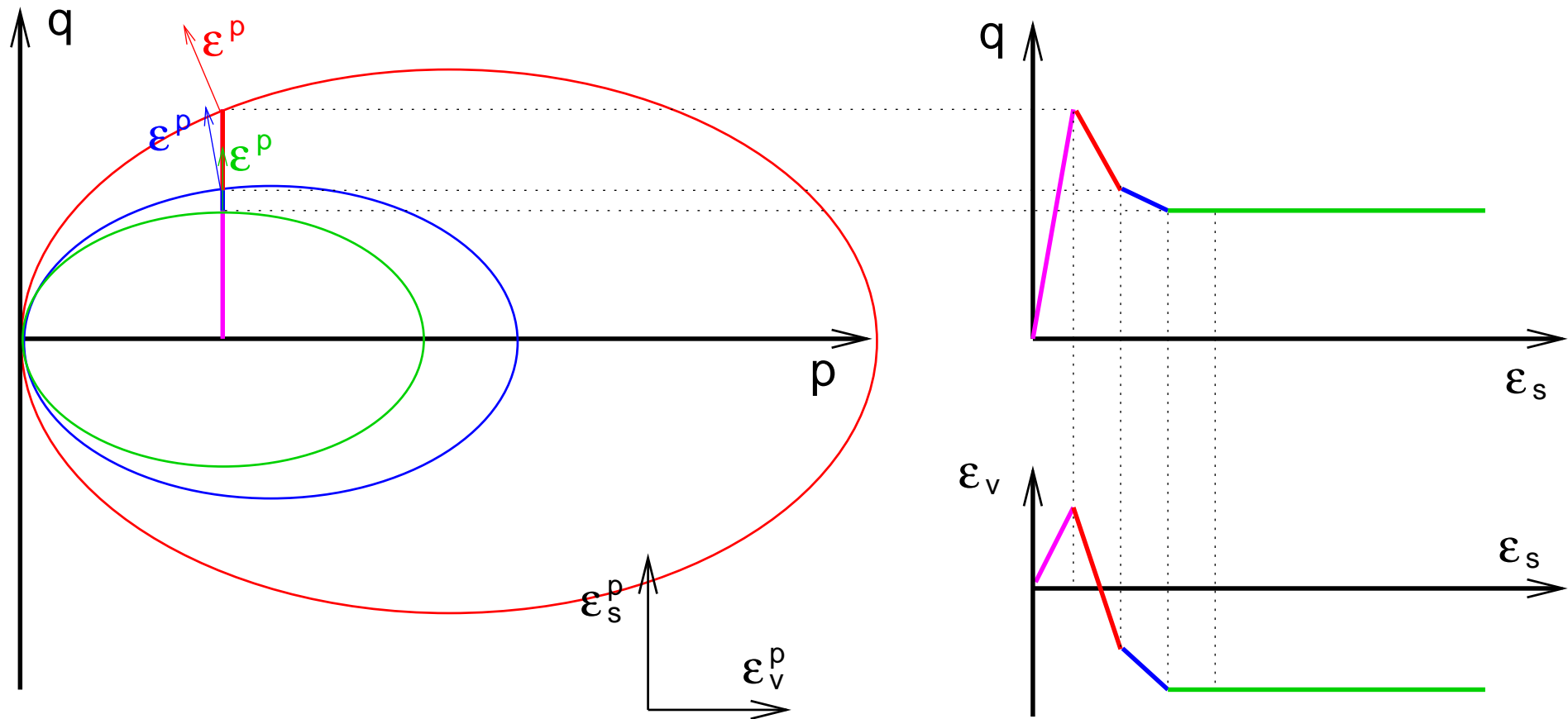
Předpověď kritických stavů

b) Silně překonsolidovaná (hutná) zemina



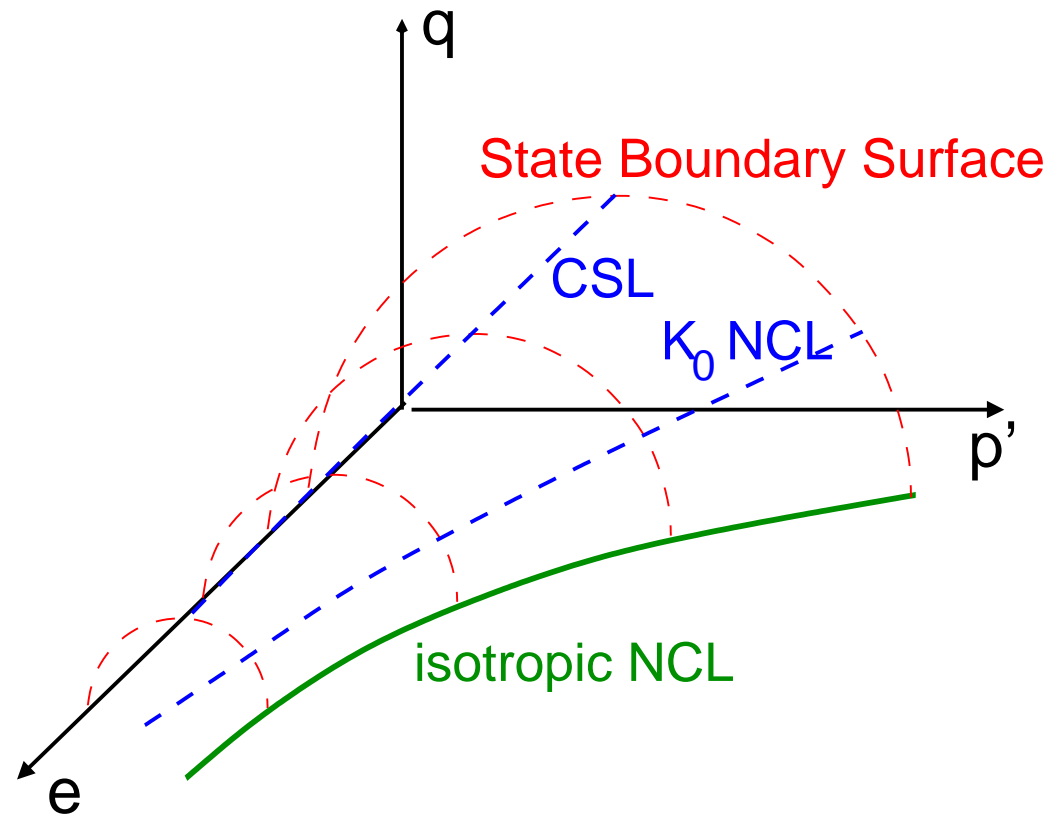
Předpověď kritických stavů

b) Silně překonsolidovaná (hutná) zemina



Mezní plocha

Jak bylo v úvodu předesláno, model Cam jílu predikuje *mezní plochu* jako vymezení všech přípustných stavů zeminy v prostoru napětí-pórovitost.



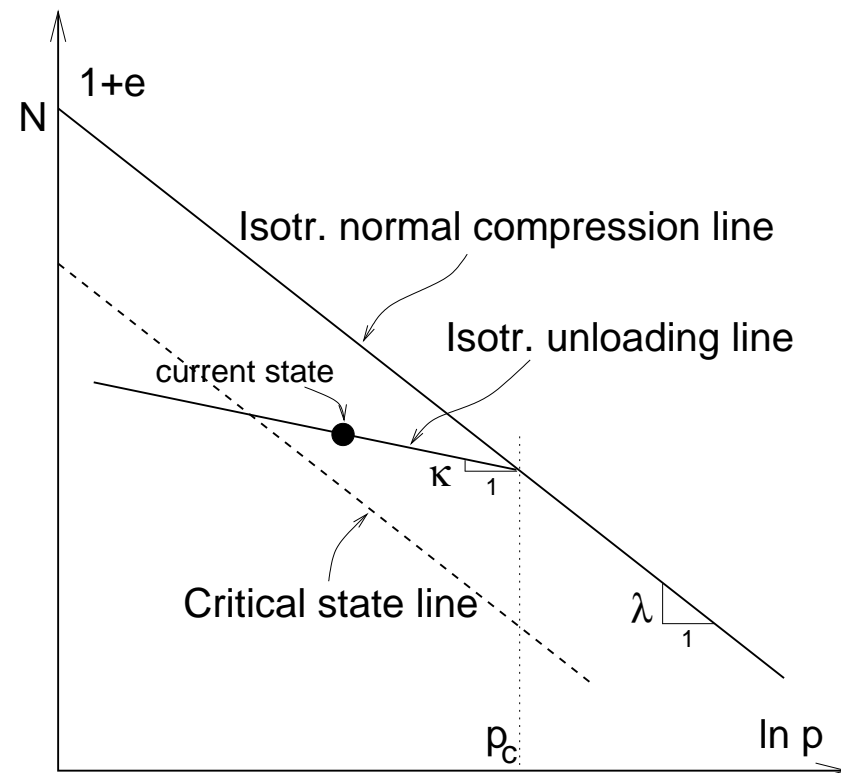
Shrnutí parametrů modelu Cam jílu

Model Cam jílu je charakterizován celkem pěti parametry: M , G , κ , λ a N .

Parametr M charakterizuje sklon obálky *kritické* pevnosti v zobrazení $p : q$.

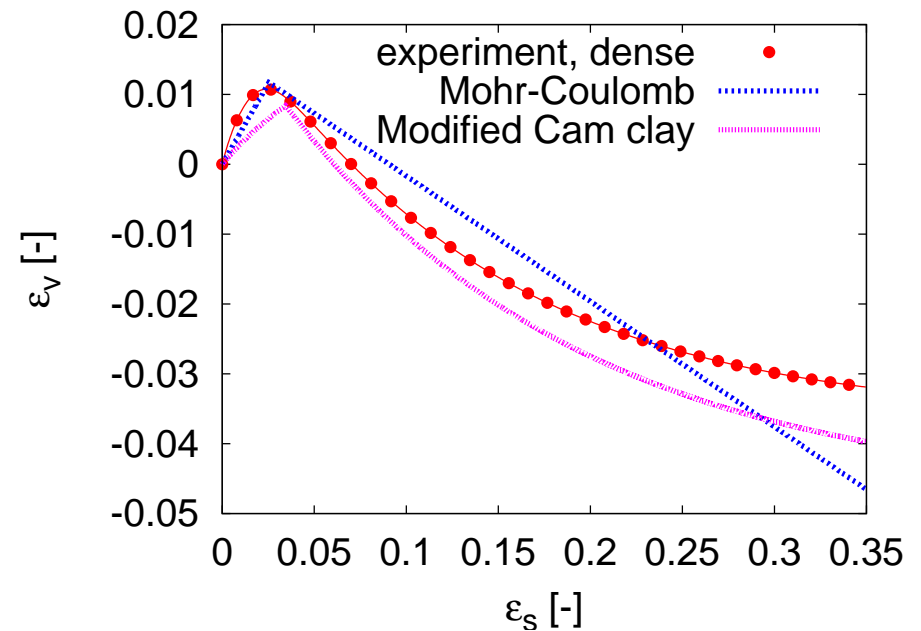
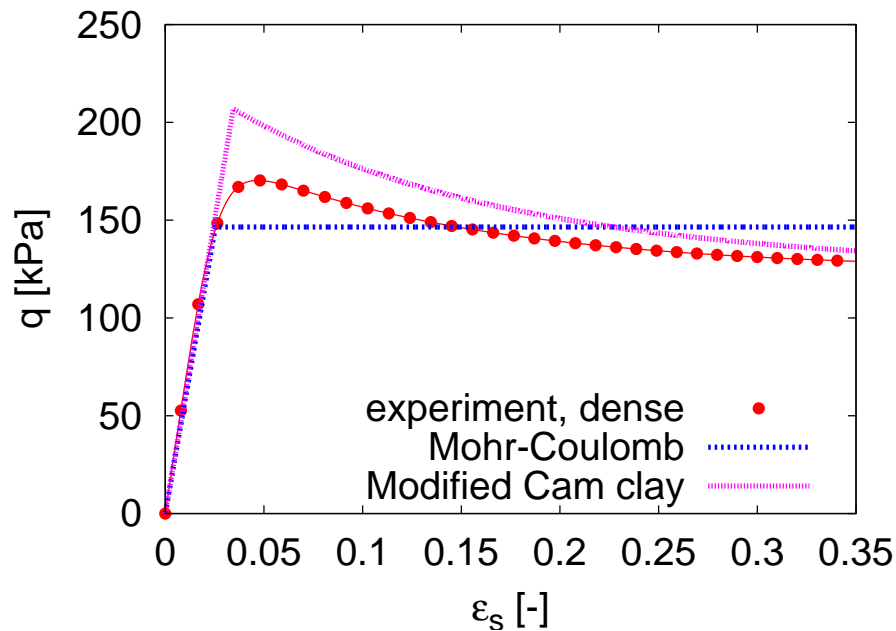
Parametr G je elastický smykový modul.

Význam parametrů κ , λ a N vyplývá z obrázku:



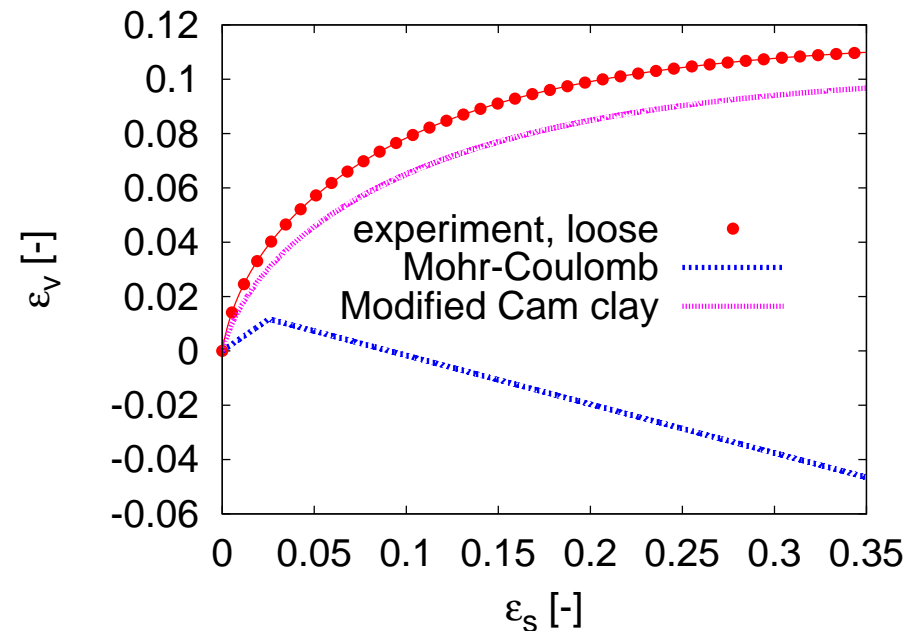
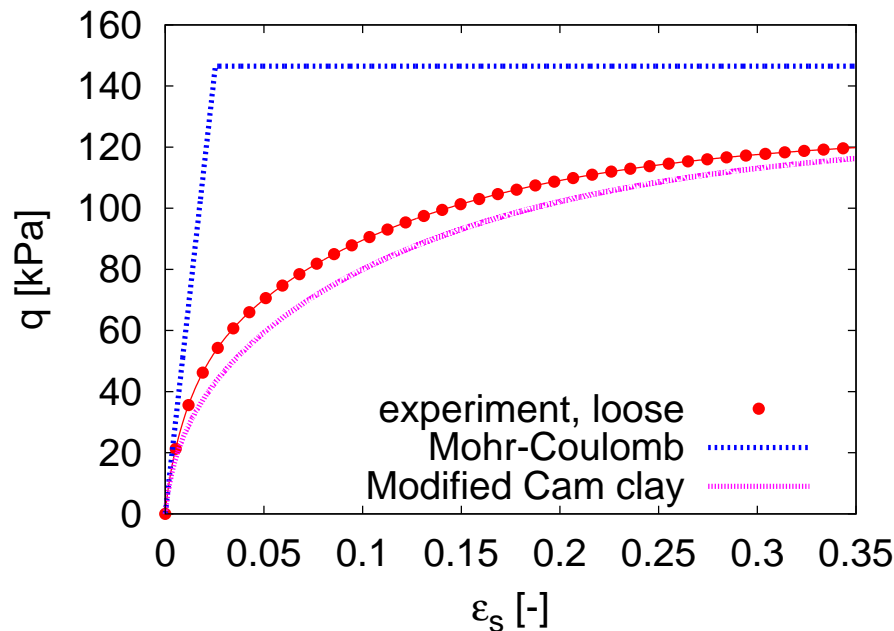
Kalibrace modelu Cam jílu - hutná zemina

Parametry modelu Cam jílu: $M = 0.88$, $G = 2MPa$, $\kappa = 0.016$,
 $\lambda = 0.11$ a $N = 1.375$.



Předpověď modelu Cam jílu - kyprá zemina

Pro simulaci laboratorní zkoušky na kypré zemině byly jak pro Mohr-Coulombův model, tak pro model Cam jílu využity *pouze parametry* kalibrované pomocí zkoušky na hutné zemině!



Shrnutí modelu Cam jílu

Model umožňuje/neumožňuje predikovat:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

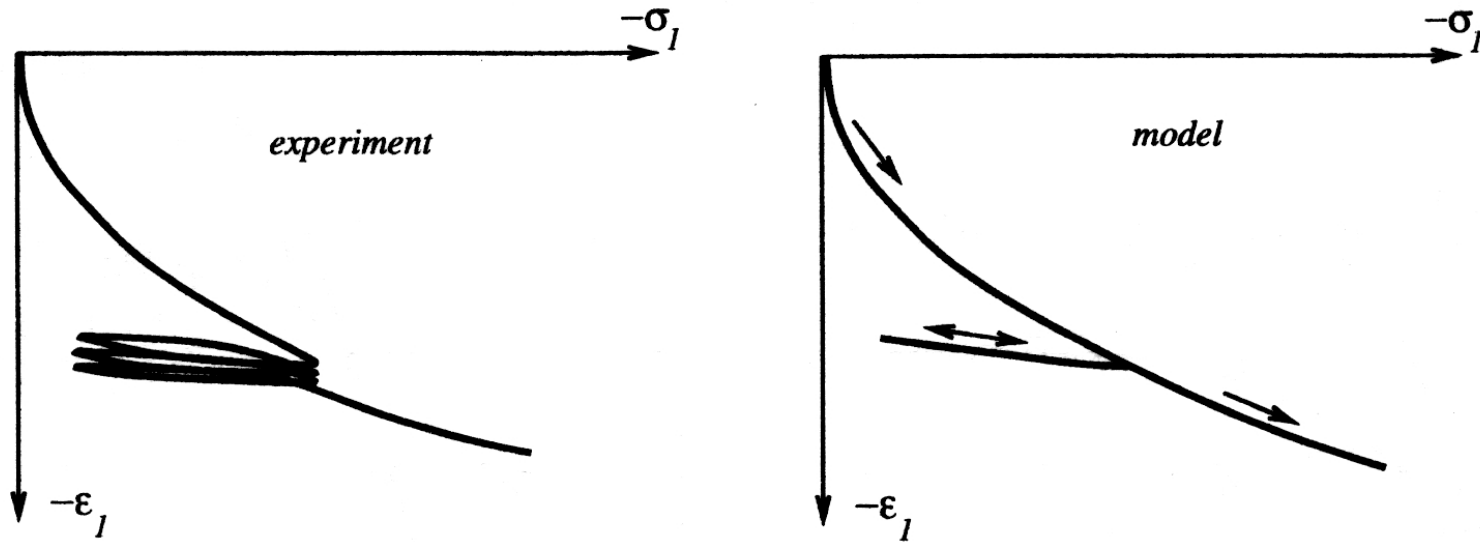
vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Hlavní nevýhody modelu Cam jílu

Za hlavní nevýhodu modelu Cam jílu (a elasto-platických modelů s izotropním zpevněním obecně) lze považovat fakt, že *chování uvnitř mezní plochy je pružné*.

Zákonitě tedy, model není vhodný pro simulaci chování překonsolidovaných zemin při malých přetvořeních, kdy je stav napětí-pórovitosti uvnitř mezní plochy. Experimentální výsledky prokazují, že *i překonsolidované zeminy se chovají nelineárně*. Model je proto také zcela nevhodný pro simulaci cyklického namáhání.



Z velkého množství pokročilých konstitučních modelů, jež řeší i tento problém, se v krátkosti seznámíme se dvěma skupinami:

- Elasto-plastické modely s kinematickým a kombinovaným zpevněním
- Hypoplastické modely

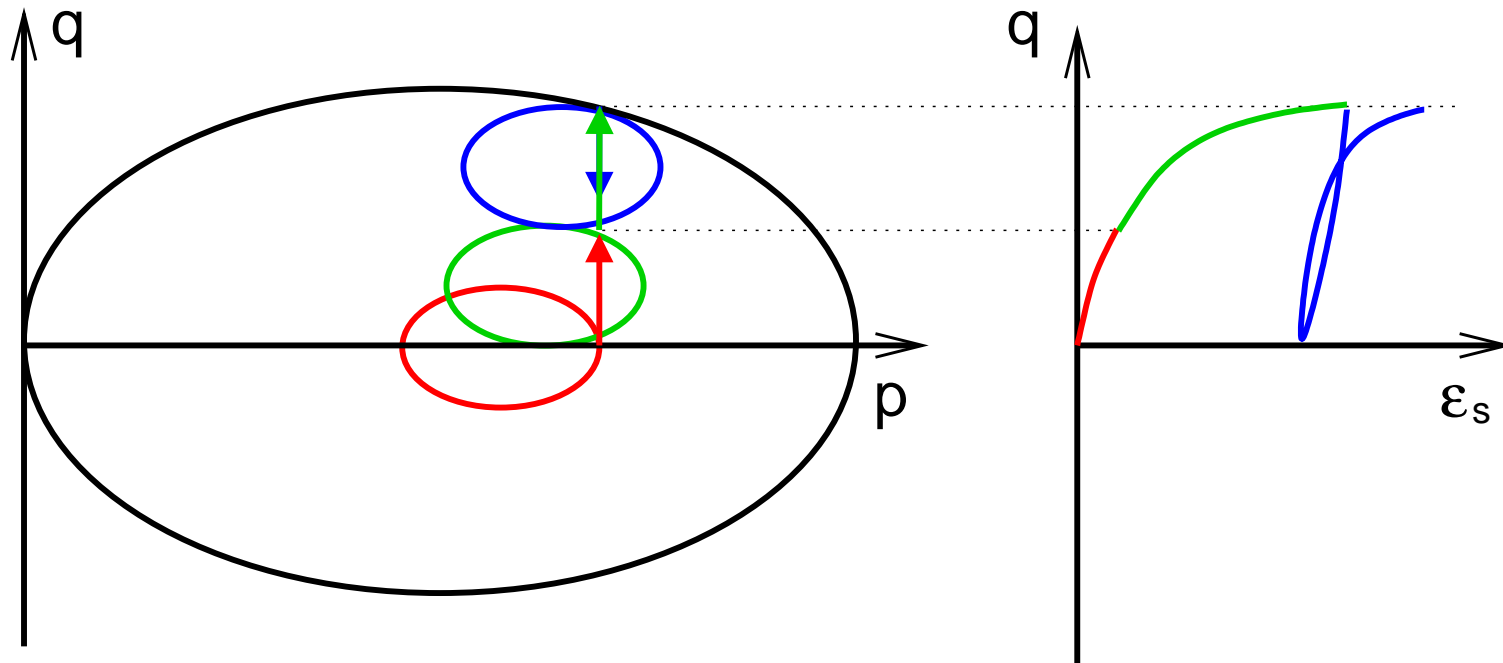
Plasticita s kinematickým a kombinovaným zpevněním

Při *kinematickém zpevnění* může plocha plasticity měnit svou polohu, např. translačním či rotačním pohybem.

Pokud se plocha plasticity nejen pohybuje, ale může i měnit velikost, hovoříme o *kombinovaném zpevnění* (může být kombinací izotropního a kinematického zpevnění).

Model samozřejmě musí uvažovat další stavové proměnné (většinou tenzorové), jež charakterizují aktuální pozici plochy plasticity. Tento fakt výrazně zesložituje matematickou formulaci modelu i měření počátečních hodnot stavových proměnných!

Příkladem modelu s kombinovaným zpevněním může být kinematický model, jež kromě *kinematické plochy plasticity* uvažuje i *mezní plochu*. Velikost modulu plasticity pak závisí na vzdálenosti kinematické plochy plasticity od mezní plochy:



Pomocí takového modelu můžeme modelovat nelineární chování uvnitř mezní plochy, tedy *odstranit hlavní nevýhodu modelu Cam jílů!*

Shrnutí kinematických modelů

Predikce některých kinematických modelů lze charakterizovat až následovně:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Je ale nutno zvážit, zda výrazné zesložnění modelu vyváží kvalitu jeho predikcí. *Často je lepší využít vhodně zvolený jednodušší model než komplikovaný model.*

Hypoplasticita

Relativně moderní přístup ke konstitučnímu modelování geomateriálů, *od základů* odlišný od elasto-plastických modelů.

U hypoplastických modelů nedělíme přetvoření na *pružná a plastická*, nerozlišujeme dva typy deformace (elastická a elasto-plastická). Nelineární chování geomateriálů je reprodukováno přírůstkově nelineárním charakterem celkové konstituční rovnice (viz. dále ↓).

Podstatu hypoplastického modelu lze vysvětlit na základě jednorozměrného příkladu. Hypoplastický vztah lze pak zapsat:

$$\dot{\sigma} = L\dot{\epsilon} + N|\dot{\epsilon}|$$

Pro moduly L a N platí $L > N > 0$.

Je zřejmé, že pro případ přitížení ($\dot{\epsilon} < 0$) je tuhost materiálu dána

$$\dot{\sigma} = (L - N)\dot{\epsilon}$$

kdežto pro odlehčení

$$\dot{\sigma} = (L + N)\dot{\epsilon}$$

Hypoplastický model predikuje vyšší tuhost materiálu pro odlehčení než pro přitížení, aniž by musel využívat dvou různých rovnic!

V obecném zápisu jsou moduly L a N *tenzorovými funkcemi* napětí i dalších stavových veličin (pórovitosti. . .), obdobně jako matice tuhosti \mathcal{M} elasto-plastického modelu.

$$\dot{\sigma} = \mathcal{L} : \dot{\epsilon} + \mathbf{N} \|\dot{\epsilon}\|$$

Tenzory \mathcal{L} a \mathbf{N} jsou sestaveny tak, aby výsledná konstituční rovnice predikovala základní aspekty chování zemin, obdobně jako pokročilé elasto-plastické modely (jako obálku kritických stavů v prostoru napětí, mezní plochu, závislost chování na pórovitosti atd.)

Shrnutí hypoplastických modelů

Pokročilé hypoplastické modely pak predikují všechny aspekty chování zemin z našeho výčtu:

porušení

dilatance

nelinearita (v oboru menších přetvoření)

hystereze

závislost tuhosti na napětí

vliv pórovitosti, kritické stavy

paměť na předchozí deformaci

Na rozdíl od elasto-plastických modelů s kombinovaným zpevněním mají ale *podstatně jednodušší matematickou formulaci.*

Reologické modely

Jedná se o konstituční modely, které uvažují *čas jako stavovou proměnnou*.

Rovnice nejsou homogenní prvního řádu vzhledem k t (viz. ← úvod do konst. modelování), čas tedy ovlivňuje predikce modelu.

Typickými experimentálně zjištěnými jevy, pro jejichž popis jsou *nutné* reologické modely, jsou *creep* (deformace při konstantním zatížení) a *relaxace* (snížení napětí při konstantní deformaci) materiálu.

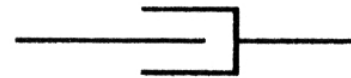
Jednorozměrné reologické modely

V krátkém úvodu do reologických konstitučních modelů se budeme zabývat pouze jednorozměrnými modely, jež vystihují princip složitějších vztahů.

Jednorozměrné modely jsou sestavovány jako kombinace dvou základních prvků:

Newtonova prvku (tlumiče)

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$$



a *Hookova prvku* (pružiny)

$$\sigma = E \epsilon$$



kde η představuje vazkost tlumiče a E tuhost pružiny.

Kelvinův model

Představuje paralelní zapojení pružiny a tlumiče:



Paralelním zapojením je deformace obou prvků stejná, může se ale lišit napětí v prvcích. Celkové napětí je součtem dílčích napětí:

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}$$

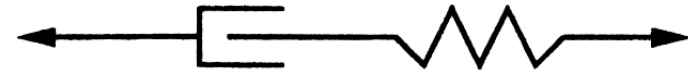
Což je obyčejná diferenciální rovnice pro ϵ , jež má řešení

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + Ce^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Je zřejmé, že Kelvinův model *může vystihnout creepové chování* (s asymptotickým přetvořením rovnajícím se $\epsilon = \sigma/E$), *nepredikuje však relaxaci* (pro $\dot{\epsilon} = 0$ dostaneme $\sigma = \text{const.}$).

Maxwellův model

Představuje sériové zapojení pružiny a tlumiče:



Napětí v prvcích musí být stejné, v každém prvku ovšem může být odlišná deformace. Rychlost deformace soustavy je rovna

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

Rovnice *není vhodná pro popis creepu*, při němž $\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} = \sigma/\eta$, čili

$$\epsilon = \epsilon_0 + t\sigma/\eta$$

Při modelování creepu deformace u Maxwellova modelu přirůstá lineárně s časem, což je nerealistické.

Maxwellův model

Na druhou stranu *relaxace*, jež je vyjádřena jako $\dot{\epsilon} = 0$, je po vyřešení obyčejné diferenciální rovnice pro σ

$$0 = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

popsána jako

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Což vyjadřuje exponenciální úbytek napětí s časem, jež přibližně odpovídá experimentům.

Obecnější reologické modely - vazkoplasticita

Prakticky použitelné reologické modely samozřejmě musí predikovat jak creep, tak relaxaci a další charakteristiky chování zemin (jako standardní elasto-plastické modely) a musí být definovány obecně pomocí tenzorů napětí a přetvoření.

Tyto modely jsou většinou definovány jako zobecnění elasto-plastických modelů a jsou nazývány *vazkoplastické*.

Přetvoření se rozkládá na $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^v$

kde $\dot{\epsilon}^v$ je vazkoplastický přírůstek přetvoření, jež zahrnuje jak vazkost, tak plasticitu.

Existují i *vazkohypoplastické* modely vyvinuté zobecněním hypoplastických modelů.