



Ústav hydrogeologie, inženýrské geologie a užité geofyziky Karlova Univerzita, Praha

Přednášky pro předmět

Matematické modelování v geomechanice I

1. část

David Mašín

Obsah

- Úvod do matematického modelování v geomechanice
- Základy tenzorového počtu
- Pojem kontinua
- Napětí
- Malá přetvoření
- Velká přetvoření

Úvod do matematického modelování

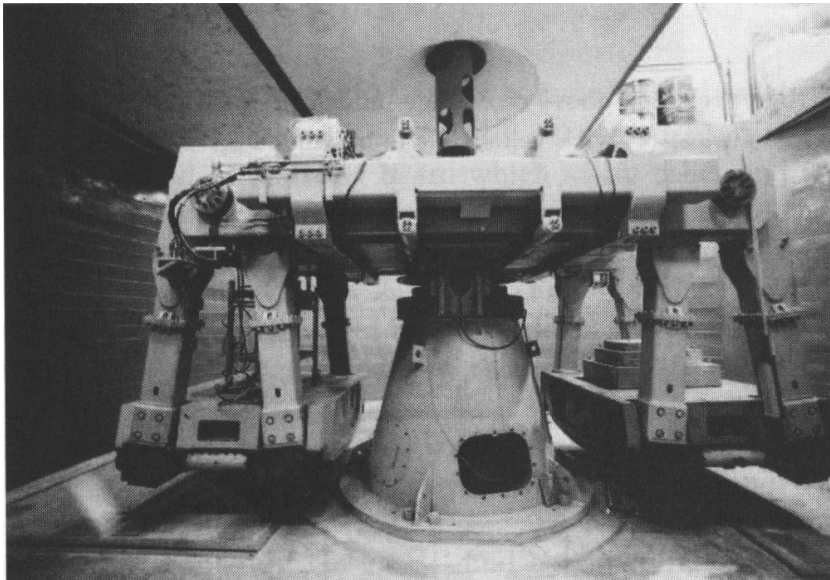
Způsoby řešení geomechanických úloh můžeme rozdělit na:

- *Observační*: Spolehnutí na pozorování, analogii a zkušenost
- *Semianalytické*: Kombinace observačních a matematických přístupů. Statistika, extrapolace, bez porozumění fyzikální podstaty jevů
- *Analytické a numerické*: Idealizace geologického prostředí matematickým modelem. Uzavřená (analytická) a numerická řešení.

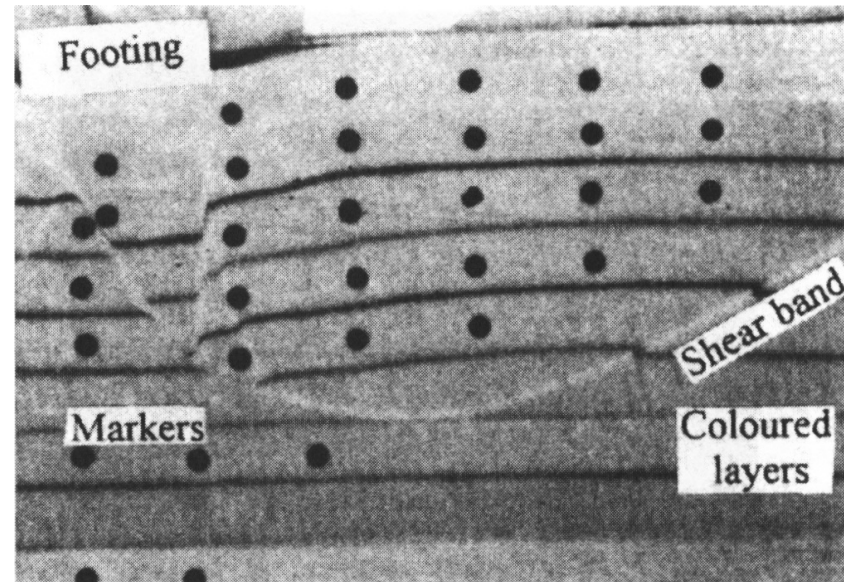
Úvod do matematického modelování

Přednáška se bude zabývat pouze posledním bodem.

V minulosti převládal zájem o analytické metody a fyzikální modelování (modelové zkoušky ve zmenšeném měřítku).



Muir Wood (2004)



Bakir et al. (1994)

Úvod do matematického modelování

Dnes, s rozvojem výpočetní techniky, začínají numerické metody nabývat výsadní postavení ve využití pro geotechnický design.

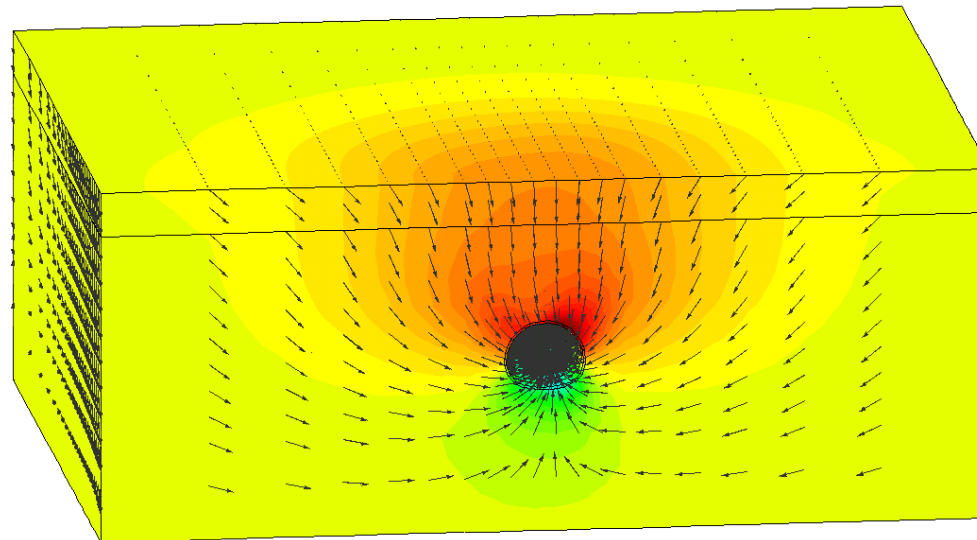
Matematický model *je nástroj* pro pochopení problému, nikdy však ne *přesným řešením*. Pro jeho účelné využití je nutné znát jeho možnosti a omezení. Model vždy zjednodušuje velmi komplexní realitu. Je nutno dbát na to, aby byly vystihnuty nejdůležitější aspekty řešeného problému.

Postup při matematickém modelování

1. Zodpovězení otázky *PROČ* potřebuji matematický model. Co s jeho pomocí potřebuji vyřešit.
2. S tvorbou modelu je nutno začít *co nejdříve*. I předběžné výsledky mohou být využity pro plánování polních zkoušek a monitoringu.
3. Je nutno si rozmyslet kvalitativní očekávané výsledky. První model sestavený s pomocí kteréhokoliv programu nebude bezchybný! Chyby je možno odhalit jen pokud co nejjednodušší model postupně zesložitujeme.
4. Vždy použijeme *co nejjednodušší* model, který stále vystihuje nejdůležitější aspekty řešeného problému.

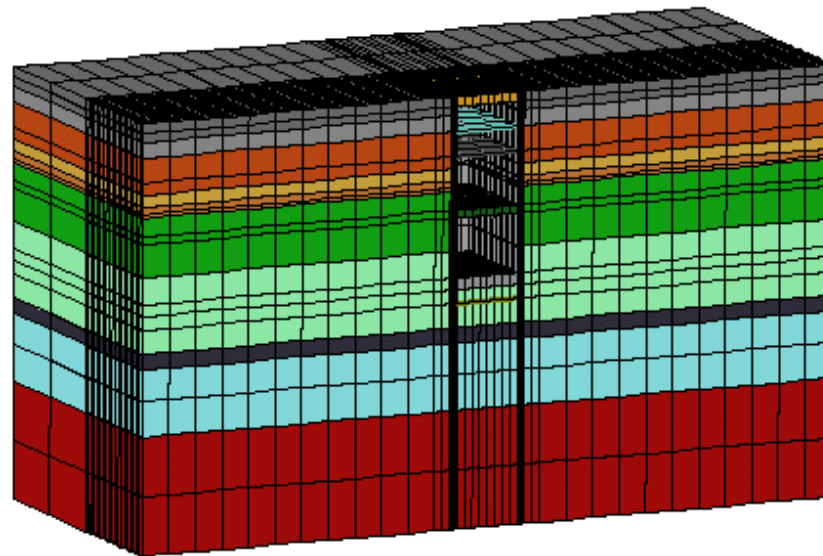
Postup při matematickém modelování

5. V případě, že není možno sestavit model jenž vystihne základní charakteristiky řešeného problému (např. 2D výpočet pro případ s výraznými trojrozměrnými efekty), je možno provést sérii simulací pro získání výsledků v mezních případech. Z rozmezí získaných hodnot je možno odhadnout správné výsledky.



Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

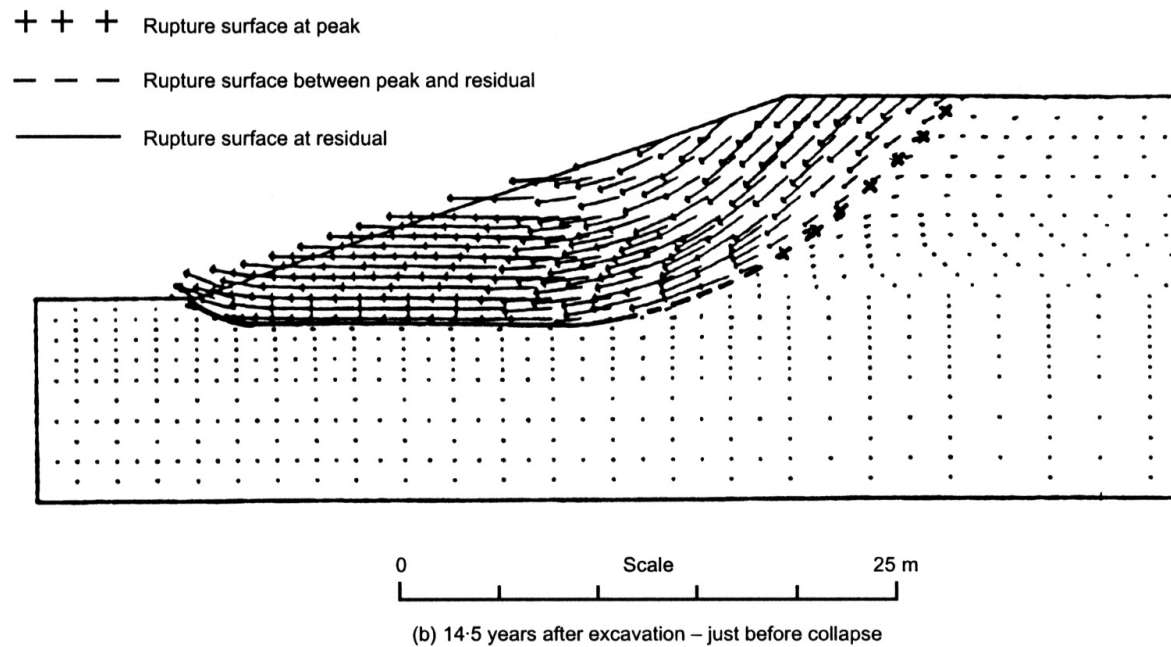
1. Řešení komplexních geotechnických úloh, kde neexistuje uzavřené (analytické) řešení (interakce několika vlivů, komplikované geologické podmínky . . .).



feat.nl (2005)

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

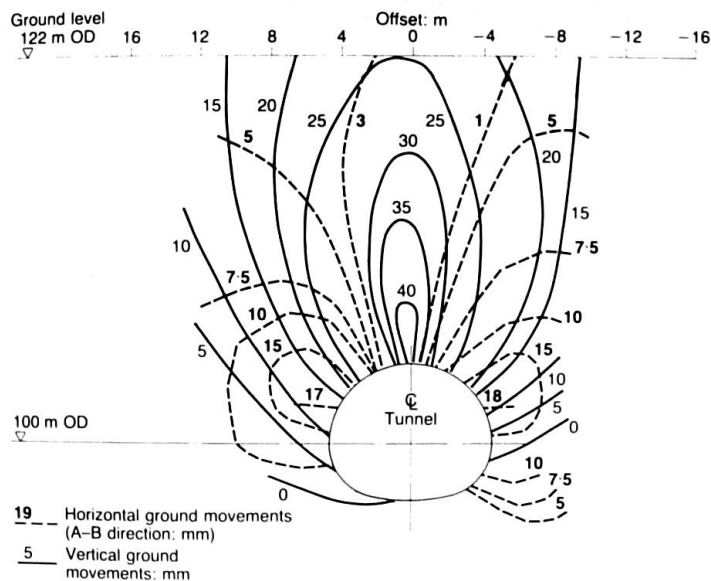
2. Pochopení i rozvoj tradičních metod (progresivní porušování, hledání kritické smykové plochy)



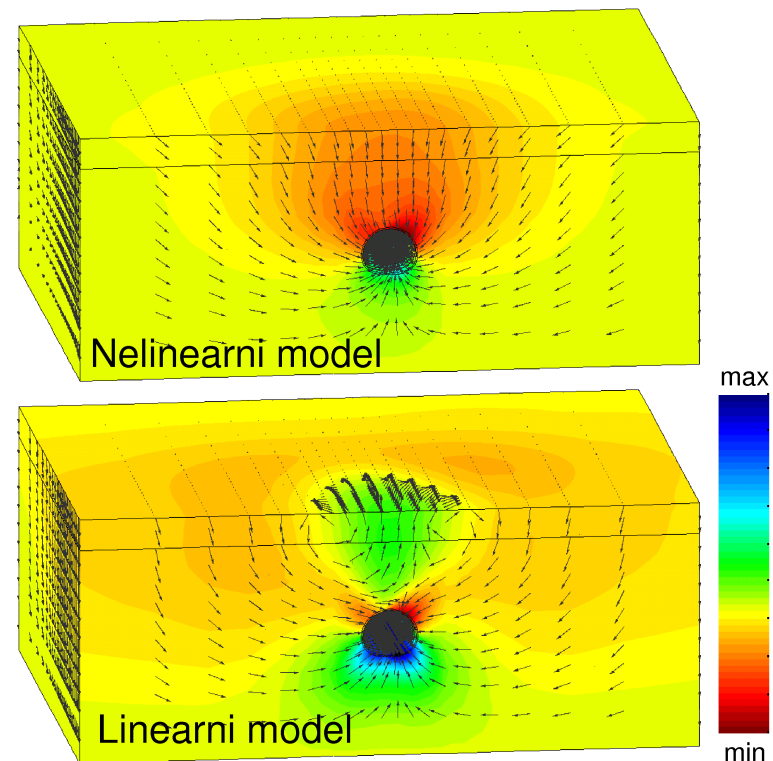
Potts et al. (1997)

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

3. Studie a zohlednění vlivu nelinearity (analytická řešení jsou pro lineárně pružný poloprostor, případně pro ideálně plastický materiál)

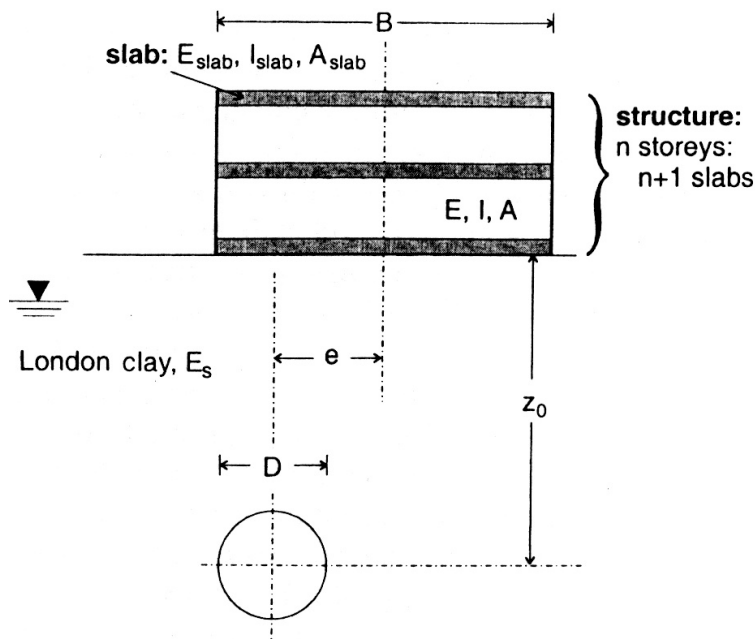


Deane and Basset (1995)

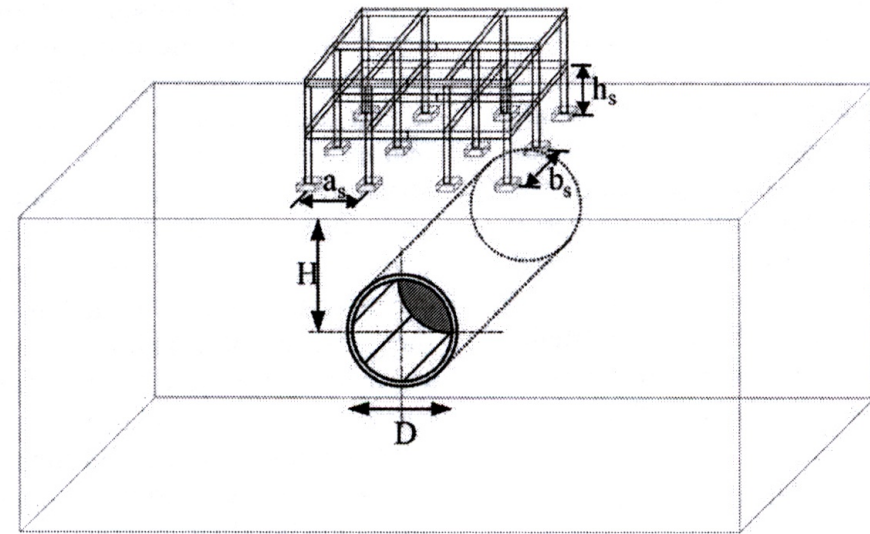


Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

4. Vývoj jednoduchých empirických návrhových vztahů z numerických studií (např. deformace budovy nad výrubem tunelu)



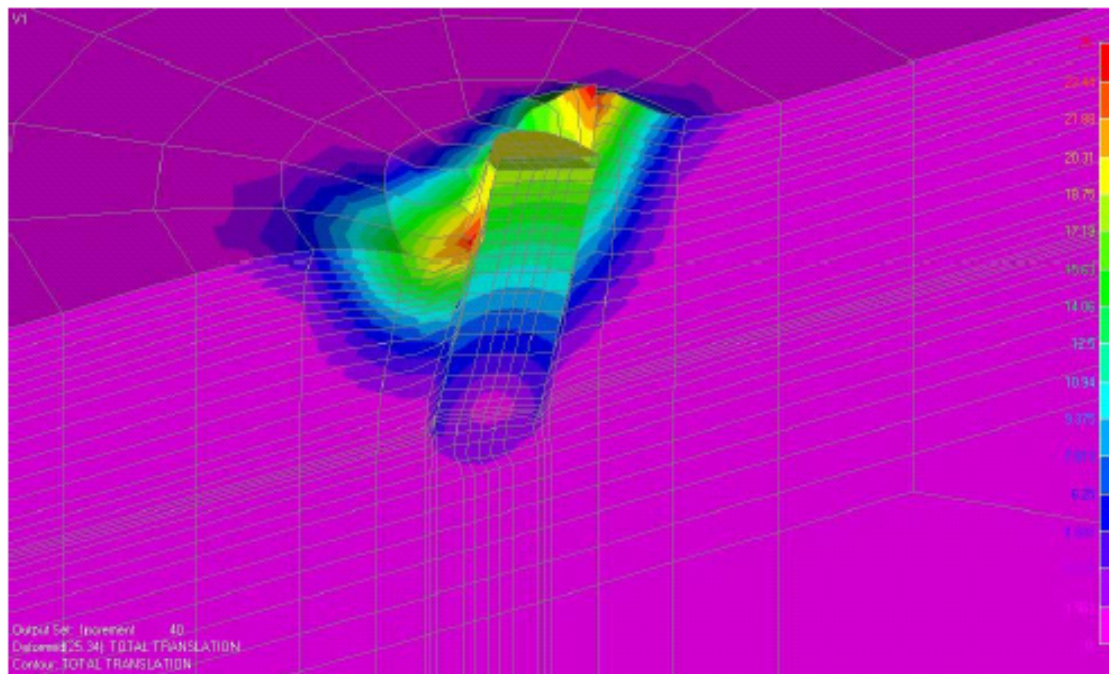
Francius et al. (2004)



Mroueh and Shahour (2003)

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

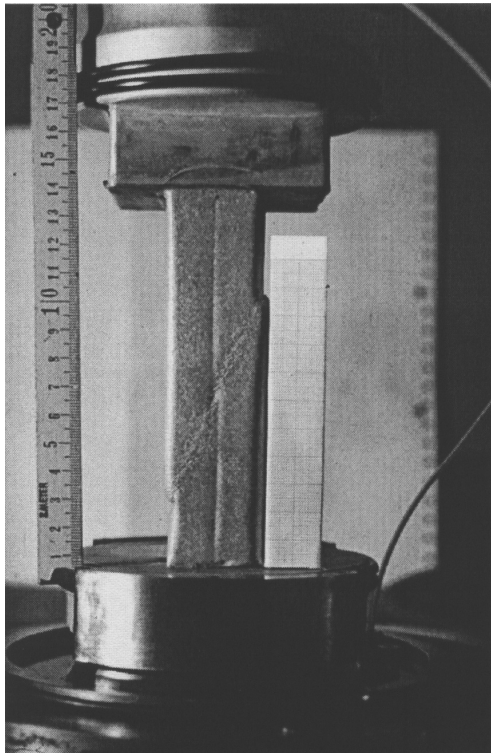
5. Interpretace údajů z monitoringu, využití pro plánování nejvhodnějších monitorovacích bodů.



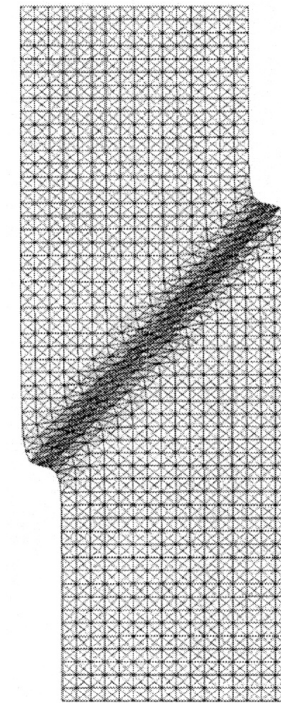
Rahim (2002)

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

6. Interpretace laboratorních zkoušek (nerovnoměrné rozdělení napětí, lokalizace deformace)



Vardoulakis (1977)



Tejchman (2004)

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

7. Řízení laboratorního programu (nestandardní dráhy napětí v okolí geotechnické konstrukce)

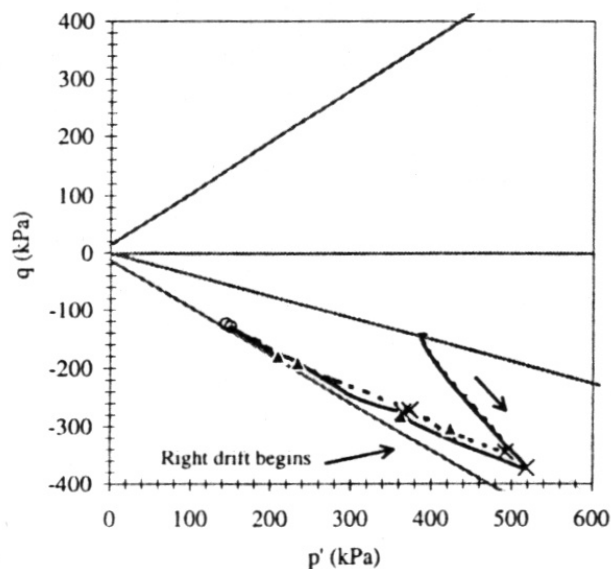


Figure 7(b). Stress path at the invert

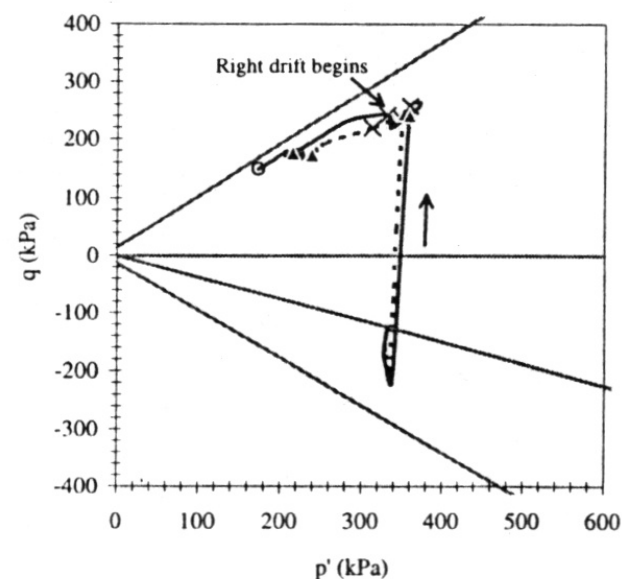


Figure 7(d). Stress path at the right springline

Tang et al. (2000)

Příklady metod a řešených úloh

1. *Klasická řešení*

Opěrná zeď, sedání plošného základu, stabilita svahu (pružnost + ideální plasticita, rovnováha aktivních a pasivních sil).

2. *Metoda konečných prvků (FEM)*

Dnes nejrozšířenější numerická metoda pro *kontinuum*. Umožňuje zohlednění komplikované geometrie, okrajových podmínek, i složitých materiálových vztahů.

Příklady úloh:

- Deformace povrchového hnědouhelného dolu
- Ražba tunelu (2D, 3D)
- Plošný základ

Příklady metod a řešených úloh

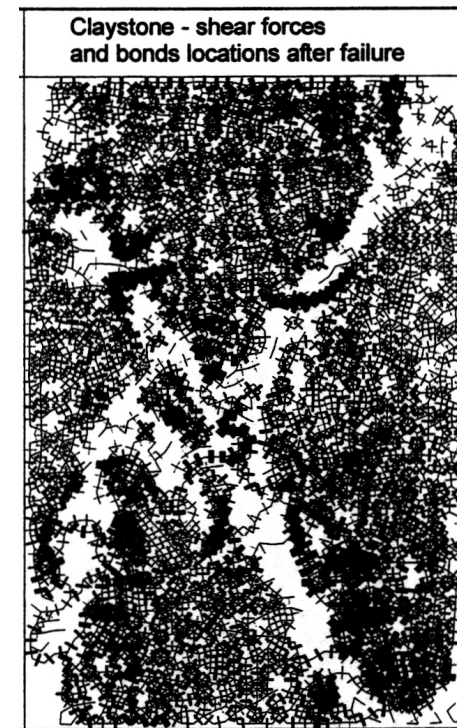
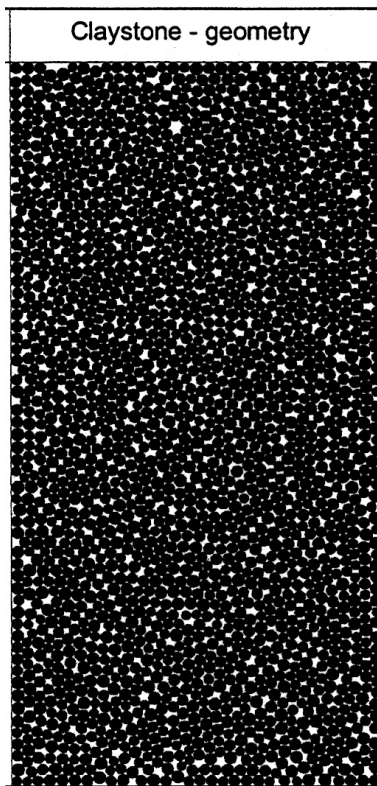
- Pažená stavební jáma
- Lokalizace deformace na smykových zónách (zaboření plošného základu)
- Proudění podzemní vody a konsolidace
- Geodynamické problémy

Příklady metod a řešených úloh

3. *Metoda oddělených prvků (DEM)*

Metoda pro studium chování *diskontinua*.

Studium strukturního chování zemin, rozpukaný horninový masív.



Doležalová a Kořán (2002)

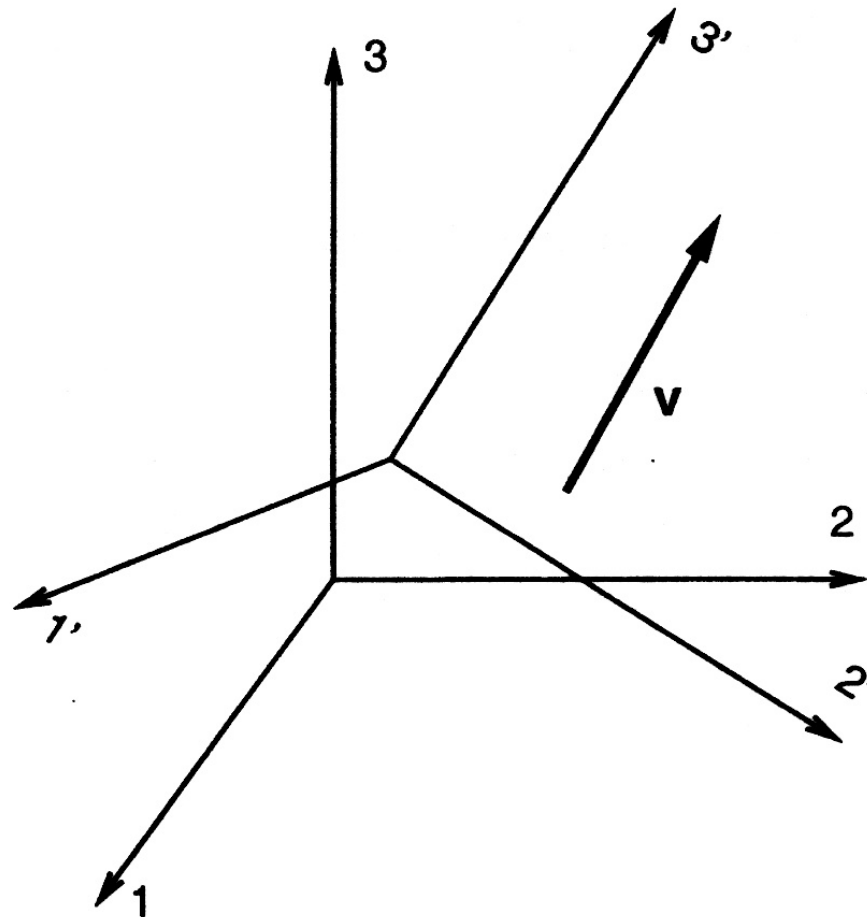
Základy tenzorového počtu

- *Vektor*: Jednorozměrné pole skalárních veličin.
Značíme \mathbf{v} , v_i . Jednotlivé *komponenty* (složky):

$$\mathbf{v} = v_i = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]$$

V našem případě budeme většinou uvažovat kartrézskou soustavu souřadnic, t.j. $n = 3$.

Pokud má vektor **fyzikální význam**, pak je nezávislý na soustavě souřadnic. (Dojde ke změně jeho *komponent*, ale význam zůstane zachován). Např. *vektor rychlosti*:



- *Tenzor* (druhého řádu): Lineární transformace jednoho vektoru do jiného vektoru (viz. dále). Značíme \mathbf{T} , T_{ij} , $\boldsymbol{\sigma}$, σ_{ij} .

Stejně jako vektor můžeme tenzor vyjádřit pomocí *komponent* v určité *soustavě souřadnic*. Vektor je jednorozměrné pole skalárních veličin, tenzor druhého řádu můžeme vyjádřit pomocí matice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

- *Příklad lineární transformace*: Máme vektor \mathbf{n} (definující normálu na plochu). Vektor napětí \mathbf{t} v této ploše vypočteme pomocí *tenzoru napětí* σ jako:

$$\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

nebo pomocí maticového zápisu (jedná se o standartní násobení matic):

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

- \Rightarrow Tenzor je matice. Ovšem **ne každá matice je tenzorem**. Tenzor musí mít fyzikální význam, je nezávislý na soustavě souřadnic (mění se jen *komponenty*, podobně jako u vektoru).

Př: máme transformaci

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

Pro zjištění zda *matice* \mathbf{A} je *tenzorem*, vyjádříme vektor \mathbf{u} v jiné soustavě souřadnic ($\Rightarrow \mathbf{u}^t$) a vypočteme nové komponenty matice \mathbf{A} v této nové soustavě ($\Rightarrow \mathbf{A}^t$). Změna komponent \mathbf{A} bude záviset na tom jak je matice definovaná.

Pokud výsledný vektor \mathbf{b}^t bude vztažen k \mathbf{b} pomocí stejné transformace jako byla využita k výpočtu nových komponent \mathbf{u} , *reprezentuje matice \mathbf{A} komponenty tenzoru*.

- Obdobně je *tenzor čtvrtého řádu* definován jako lineární transformace tenzoru druhého řádu. Značíme jej pomocí kaligrafických písmen \mathcal{L} , \mathcal{L}_{ijkl}

Tzn. tenzor 4. řádu \mathcal{L} má v kartézské soustavě souřadnic *81 komponent*. Vyjádření pomocí 2D matice je formálně možné, komponenty tenzoru druhého řádu musí být vyjádřeny jako vektor \rightarrow

Formální vyjádření tenzoru čtvrtého řádu pomocí *matice* a tenzoru druhého řádu pomocí *vektoru*:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{1111} & \mathcal{L}_{1112} & \mathcal{L}_{1113} & \mathcal{L}_{1121} & \mathcal{L}_{1122} & \mathcal{L}_{1123} & \mathcal{L}_{1131} & \mathcal{L}_{1132} & \mathcal{L}_{1133} \\ \mathcal{L}_{1211} & \mathcal{L}_{1212} & \mathcal{L}_{1213} & \mathcal{L}_{1221} & \mathcal{L}_{1222} & \mathcal{L}_{1223} & \mathcal{L}_{1231} & \mathcal{L}_{1232} & \mathcal{L}_{1233} \\ \mathcal{L}_{1311} & \mathcal{L}_{1312} & \mathcal{L}_{1313} & \mathcal{L}_{1321} & \mathcal{L}_{1322} & \mathcal{L}_{1323} & \mathcal{L}_{1331} & \mathcal{L}_{1332} & \mathcal{L}_{1333} \\ \mathcal{L}_{2111} & \mathcal{L}_{2112} & \mathcal{L}_{2113} & \mathcal{L}_{2121} & \mathcal{L}_{2122} & \mathcal{L}_{2123} & \mathcal{L}_{2131} & \mathcal{L}_{2132} & \mathcal{L}_{2133} \\ \mathcal{L}_{2211} & \mathcal{L}_{2212} & \mathcal{L}_{2213} & \mathcal{L}_{2221} & \mathcal{L}_{2222} & \mathcal{L}_{2223} & \mathcal{L}_{2231} & \mathcal{L}_{2232} & \mathcal{L}_{2233} \\ \mathcal{L}_{2311} & \mathcal{L}_{2312} & \mathcal{L}_{2313} & \mathcal{L}_{2321} & \mathcal{L}_{2322} & \mathcal{L}_{2323} & \mathcal{L}_{2331} & \mathcal{L}_{2332} & \mathcal{L}_{2333} \\ \mathcal{L}_{3111} & \mathcal{L}_{3112} & \mathcal{L}_{3113} & \mathcal{L}_{3121} & \mathcal{L}_{3122} & \mathcal{L}_{3123} & \mathcal{L}_{3131} & \mathcal{L}_{3132} & \mathcal{L}_{3133} \\ \mathcal{L}_{3211} & \mathcal{L}_{3212} & \mathcal{L}_{3213} & \mathcal{L}_{3221} & \mathcal{L}_{3222} & \mathcal{L}_{3223} & \mathcal{L}_{3231} & \mathcal{L}_{3232} & \mathcal{L}_{3233} \\ \mathcal{L}_{3311} & \mathcal{L}_{3312} & \mathcal{L}_{3313} & \mathcal{L}_{3321} & \mathcal{L}_{3322} & \mathcal{L}_{3323} & \mathcal{L}_{3331} & \mathcal{L}_{3332} & \mathcal{L}_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Zjednodušený zápis *Voigt notation*

Jak uvidíme v dalších částech přednášky, většina tenzorů druhého řádu jež se objevují v mechanice kontinua jsou tenzory *symetrické*, kdy $A_{ij} = A_{ji}$. Pro plnou definici takového tenzoru druhého řádu pak stačí v 3D definovat *šest* komponent, místo všech *devíti* komponent.

Tohoto faktu využívá alternativní zápis *Voigt notation*, kdy je tenzor druhého řádu zapsán jako vektor následujícím způsobem \rightarrow

Obdobně lze tenzor 4. řádu zapsat jako matici o 6x6 komponentách.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Zápis operací s vektory a tenzory

Budeme používat dva způsoby zápisu: *indexový* a *tenzorový*. U indexového zápisu bude využíváno tzv. Einsteinovo indexování:

Pokud se v součinu nebo v samostatně stojící proměnné vyskytnou dva stejné indexy, provede se součet proměnných probíhající přes tyto indexy. Součet neprobíhá pro tzv. volný index, který se vyskytuje i u proměnné na levé straně rovnice.

Operace s vektory a tenzory

- Součet dvou tenzorů:

tenzorový zápis	indexový zápis	výsledek	pomocí komponent
$\mathbf{T} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$	$T_{ij} = G_{ij} + H_{ij}$	tezor 2ř.	$T_{11} = G_{11} + H_{11}$ \dots $T_{33} = G_{33} + H_{33}$
$\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{M}$	$\mathcal{L}_{ijkl} = \mathcal{A}_{ijkl} + \mathcal{M}_{ijkl}$	tezor 4ř.	$\mathcal{L}_{1111} = \mathcal{A}_{1111} + \mathcal{M}_{1111}$ \dots $\mathcal{L}_{3333} = \mathcal{A}_{3333} + \mathcal{M}_{3333}$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} + H_{11} & G_{12} + H_{12} & G_{13} + H_{13} \\ G_{21} + H_{21} & G_{22} + H_{22} & G_{23} + H_{23} \\ G_{31} + H_{31} & G_{32} + H_{32} & G_{33} + H_{33} \end{bmatrix}$$

Operace s vektory a tenzory

- Násobení tenzoru skalární veličinou:

tenzorový zápis	indexový zápis	výsledek	pomocí komponent
$\mathbf{C} = a\mathbf{T}$	$C_{ij} = aT_{ij}$	tezor 2ř.	$C_{11} = aT_{11}$ \dots $C_{33} = aT_{33}$
$\mathcal{L} = a\mathcal{M}$	$\mathcal{L}_{ijkl} = a\mathcal{M}_{ijkl}$	tezor 4ř.	$\mathcal{L}_{1111} = a\mathcal{M}_{1111}$ \dots $\mathcal{L}_{3333} = a\mathcal{M}_{3333}$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aT_{11} & aT_{12} & aT_{13} \\ aT_{21} & aT_{22} & aT_{23} \\ aT_{31} & aT_{32} & aT_{33} \end{bmatrix}$$

Operace s vektory a tenzory

- Operátor "·" značí součet přes jeden index

tenzorový zápis	indexový zápis	výsledek	pomocí komponent
$\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}$	$b_i = T_{ij}d_j$	tezor 1ř.	$b_1 = T_{11}d_1 + T_{12}d_2 + T_{13}d_3$...
$\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$	$T_{ik} = \sigma_{ij}\epsilon_{jk}$	tezor 2ř.	$T_{11} = \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{12}\epsilon_{21} + \sigma_{13}\epsilon_{31}$... $T_{23} = \sigma_{21}\epsilon_{13} + \sigma_{22}\epsilon_{23} + \sigma_{23}\epsilon_{33}$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}d_1 + T_{12}d_2 + T_{13}d_3 \\ T_{21}d_1 + T_{22}d_2 + T_{23}d_3 \\ T_{31}d_1 + T_{32}d_2 + T_{33}d_3 \end{bmatrix}$$

Operace s vektory a tenzory

- Operátor ":" značí součet přes dva indexy

tenzorový zápis	indexový zápis	výsledek	pomocí komponent
$c = \sigma : \epsilon$	$c = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}$	skalár	$c = \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{12}\epsilon_{12}$ \dots $\sigma_{23}\epsilon_{23} + \sigma_{33}\epsilon_{33}$
$\sigma = \mathcal{L} : \epsilon$	$\sigma_{ij} = \mathcal{L}_{ijkl}\epsilon_{kl}$	tezor 2ř.	$\sigma_{11} = \mathcal{L}_{1111}\epsilon_{11} + \mathcal{L}_{1112}\epsilon_{12}$ $+ \mathcal{L}_{1113}\epsilon_{13} + \mathcal{L}_{1121}\epsilon_{21} \dots$ \dots $\sigma_{33} = \mathcal{L}_{3311}\epsilon_{11} + \mathcal{L}_{3312}\epsilon_{12}$ $+ \mathcal{L}_{3313}\epsilon_{13} + \mathcal{L}_{3321}\epsilon_{21} \dots$

$$c = \sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{13}\epsilon_{13} + \sigma_{21}\epsilon_{21} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{23}\epsilon_{23} +$$

$$\sigma_{31}\epsilon_{31} + \sigma_{32}\epsilon_{32} + \sigma_{33}\epsilon_{33}$$

Operace s vektory a tenzory

- Operátor " \otimes " (*dyadic product*)

tenzorový zápis	indexový zápis	výsledek	pomocí komponent
$\mathbf{T} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}$	$T_{ij} = b_i d_j$	tezor 2ř.	$T_{11} = b_1 d_1$...
$\mathcal{L} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\epsilon}$	$\mathcal{L}_{ijkl} = \sigma_{ij} \epsilon_{kl}$	tezor 4ř.	$\mathcal{L}_{1111} = \sigma_{11} \epsilon_{11}$ $\mathcal{L}_{1211} = \sigma_{12} \epsilon_{11}$... $\mathcal{L}_{3332} = \sigma_{33} \epsilon_{32}$ $\mathcal{L}_{3333} = \sigma_{33} \epsilon_{33}$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 d_1 & b_1 d_2 & b_1 d_3 \\ b_2 d_1 & b_2 d_2 & b_2 d_3 \\ b_3 d_1 & b_3 d_2 & b_3 d_3 \end{bmatrix}$$

Jednotkový tenzor 2. řádu (tzv. Kroneckerovo delta) značíme $\mathbf{1}$

$$\mathbf{1} = 1_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jednotkový tenzor 4. řádu značíme \mathcal{I} a má komponenty

$$\mathcal{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (1_{ik}1_{jl} + 1_{il}1_{jk})$$

Je tedy patrné, že $\mathcal{I} \neq \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$

Permutační symbol

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ nebo } i, j, k = 2, 3, 1 \text{ nebo } i, j, k = 3, 1, 2 \\ -1 & \text{pro } i, j, k = 1, 3, 2 \text{ nebo } i, j, k = 2, 1, 3 \text{ nebo } i, j, k = 3, 2, 1 \\ 0 & \text{pro } i = j \text{ nebo } j = k \text{ nebo } i = k \end{cases}$$

Pomocí permutačního symbolu zapíšeme např. determinat jako

$$\det(\mathbf{T}) = e_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3}$$

Tenzorové operátory

Stopa tenzoru

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1}$$

Euklidovská norma

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}$$

Směr

$$\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|}$$

Deviátor

$$\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}$$

Některé vlastnosti tenzorů

Každý tenzor \mathbf{A} (A_{ij}) lze rozložit podle

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \quad \text{tj.} \quad A_{il} = L_{ij} D_{jk} U_{kl}$$

kde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

je tzv. **dolní trojúhelníkový** tenzor.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & U_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

\mathbf{U} je tzv. **horní trojúhelníkový** tenzor a \mathbf{D} je **diagonální** tenzor.

Pokud jsou všechny diagonální prvky tenzoru \mathbf{D} kladné, nazývá se tenzor \mathbf{A} **pozitivně definitní**. V opačném případě se tenzor \mathbf{A} nazývá singulární a dekompozice podle $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}$ není jednoznačná.

Tenzor **transponovaný** k tenzoru $\mathbf{A} = A_{ij}$ získáme prohozením sloupců a řádků

$$\mathbf{A}^T = A_{ji}$$

Tenzor je **symetrický** pokud

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad \text{tedy} \quad A_{ij} = A_{ji}$$

\mathbf{A}^{-1} označuje **inverzní** tenzor, pro který platí

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Inverzní tenzor existuje pouze pro tenzor jenž není singulární.

Ortogonální tenzor je ten, pro který platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

Tenzorový počet: cvičení

Pro tenzory 2. řádu $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \dots$ a tenzory prvního řádu (vektory) $\mathbf{b}, \mathbf{d}, \dots$ ukažte, že:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) = \|\mathbf{A}\|^2 = \mathbf{A} : \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{C} + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 + 2\mathbf{A} : \mathbf{B}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{A} : \mathbf{B})$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T)\mathbf{A} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) : \mathbf{C}$$

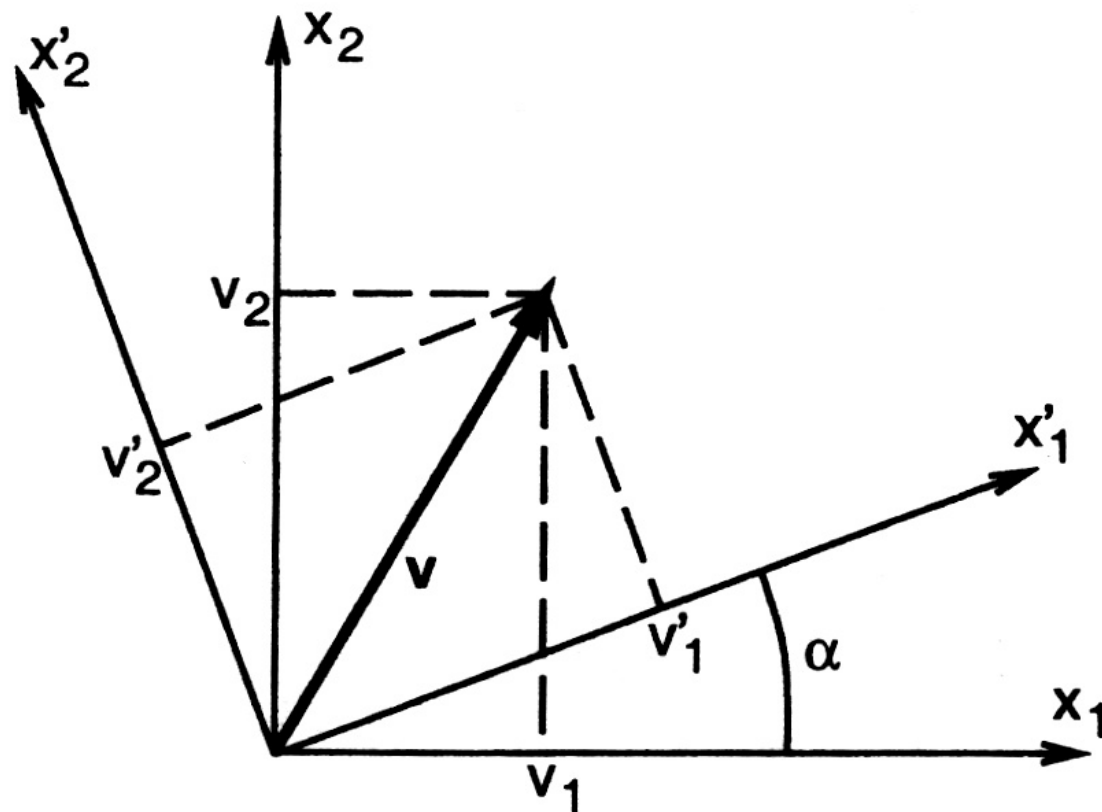
Změna soustavy souřadnic

Při změně soustavy souřadnic se změní komponenty vektoru či tenzoru, přestože jejich fyzikální význam zůstane zachován.

Pro případ vektoru jsou jeho nové komponenty v čárkovaných souřadnicích počítány pomocí

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \quad \text{tj.} \quad v'_i = Q_{ij}v_j$$

Změna soustavy souřadnic



Změna soustavy souřadnic

Transformační matice \mathbf{Q} je ortogonální ($\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$) a její determinant je roven jedné ($\det(\mathbf{Q}) = 1$). Komponenty pro 2D úlohu je možno zapsat jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Při potočení souřadného systému pro *tenzor 2. řádu* se jeho nové komponenty vypočtou z

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad \text{tj.} \quad T'_{ij} = Q_{ik} T_{kl} Q_{jl}$$

Invarianty tenzoru

Invarianty jsou skalární veličiny vypočtené ze složek tenzoru, jejichž hodnota se **nemění se změnou soustavy souřadnic**. Rozlišujeme tři invarianty, jež značíme I_1 , I_2 a I_3 .

1. invariant $I_1 = \text{tr}(\mathbf{T})$

2. invariant $I_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{T} : \mathbf{T} - I_1^2)$

3. invariant $I_3 = \det(\mathbf{T})$

Pro diagonální tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

se invarianty tedy vypočtou

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = -(T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11})$$

$$I_3 = T_{11}T_{22}T_{33}$$

Invarianty lze vypočítat i pro **deviátor** tenzoru

$$\text{dev}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} - \mathbf{1} \frac{\text{tr}(\mathbf{T})}{3}$$

Značíme J_1 , J_2 a J_3

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{3}I_1^2 + I_2$$

$$J_3 = I_3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + \frac{2}{27}I_1^3$$

Vlastní vektor, vlastní čísla

Pro tenzor \mathbf{T} hledáme takový skalár λ a vektor \mathbf{n} , aby platilo

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

\mathbf{n} se označuje jako **vlastní vektor** a λ jako **vlastní číslo**.

Rovnici je možné upravit na

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Z čehož plyne netriviální řešení (pro $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$). Podle Cramerova pravidla

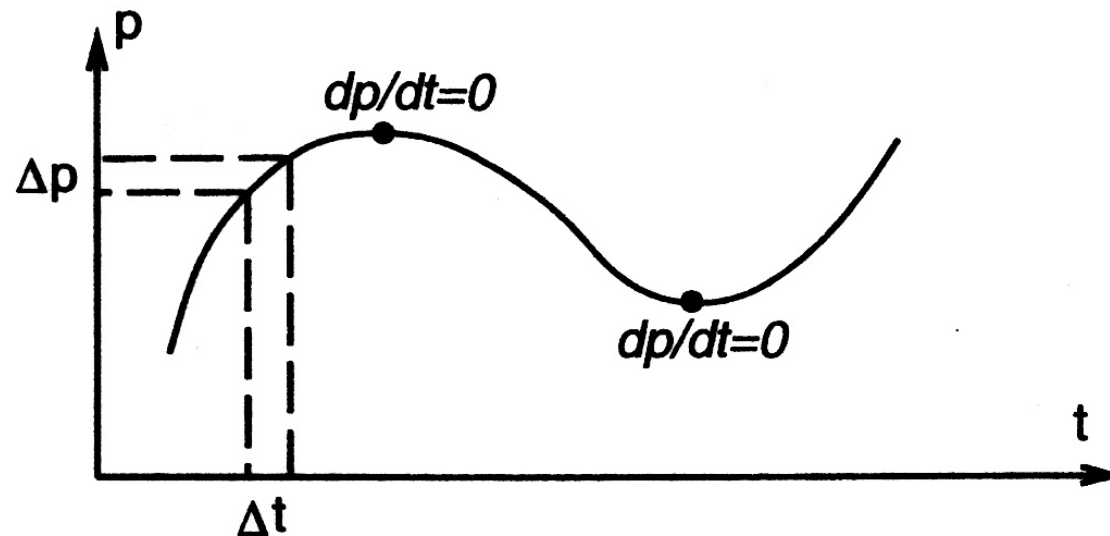
$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

což lze zapsat pomocí invariantů (\Rightarrow vlastní čísla nejsou závislá na soustavě souřadnic)

$$I_3 + \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3 = 0$$

Derivace

Reprezentuje velikost změny funkce v nekonečně malém intervalu



Matematická definice pro skalární funkci $p(t)$

$$\frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Derivace tenzorové funkce

Derivaci definujeme i pro vektorové a tenzorové funkce.

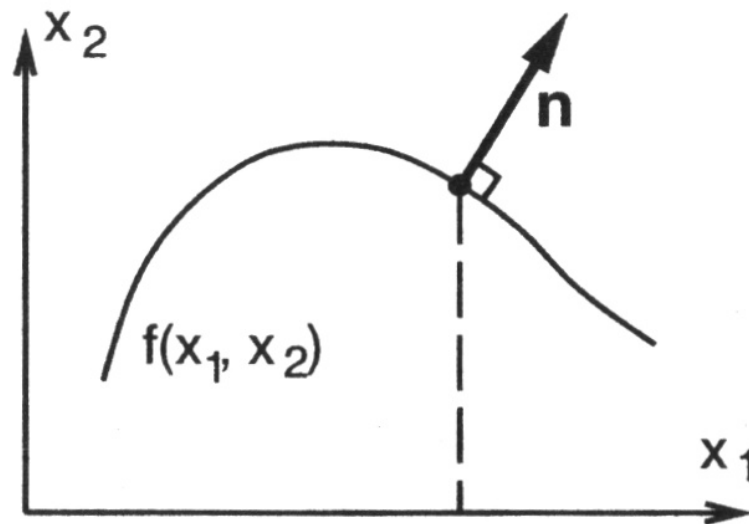
Derivace tenzorové funkce druhého řádu $\mathbf{p}(t)$ má komponenty:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dp_{11}}{dt} & \frac{dp_{12}}{dt} & \frac{dp_{13}}{dt} \\ \frac{dp_{21}}{dt} & \frac{dp_{22}}{dt} & \frac{dp_{23}}{dt} \\ \frac{dp_{31}}{dt} & \frac{dp_{32}}{dt} & \frac{dp_{33}}{dt} \end{bmatrix}$$

Gradient

Gradient udává směr normály k průběhu funkce. Pro funkci dvou proměnných $f(x_1, x_2)$ zapisujeme

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]$$



Gradient

Gradient funkce $f(\boldsymbol{\sigma})$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor druhého řádu, udává směr normály k ploše $f(\boldsymbol{\sigma})$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{21}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{31}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{32}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \end{bmatrix}$$

Gradient

Gradient definujeme i pro *vektorové pole* $\mathbf{v}_{(\mathbf{x})}$:

$$\text{grad } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = (\nabla \otimes \mathbf{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Divergence

Divergence *vektorového pole* $\mathbf{v}_{(\mathbf{x})}$ je skalární veličina jež je dána vztahem

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Ekvivalentně je možno definovat divergenci *tenzorového pole* $\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{x})}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Pojem kontinua

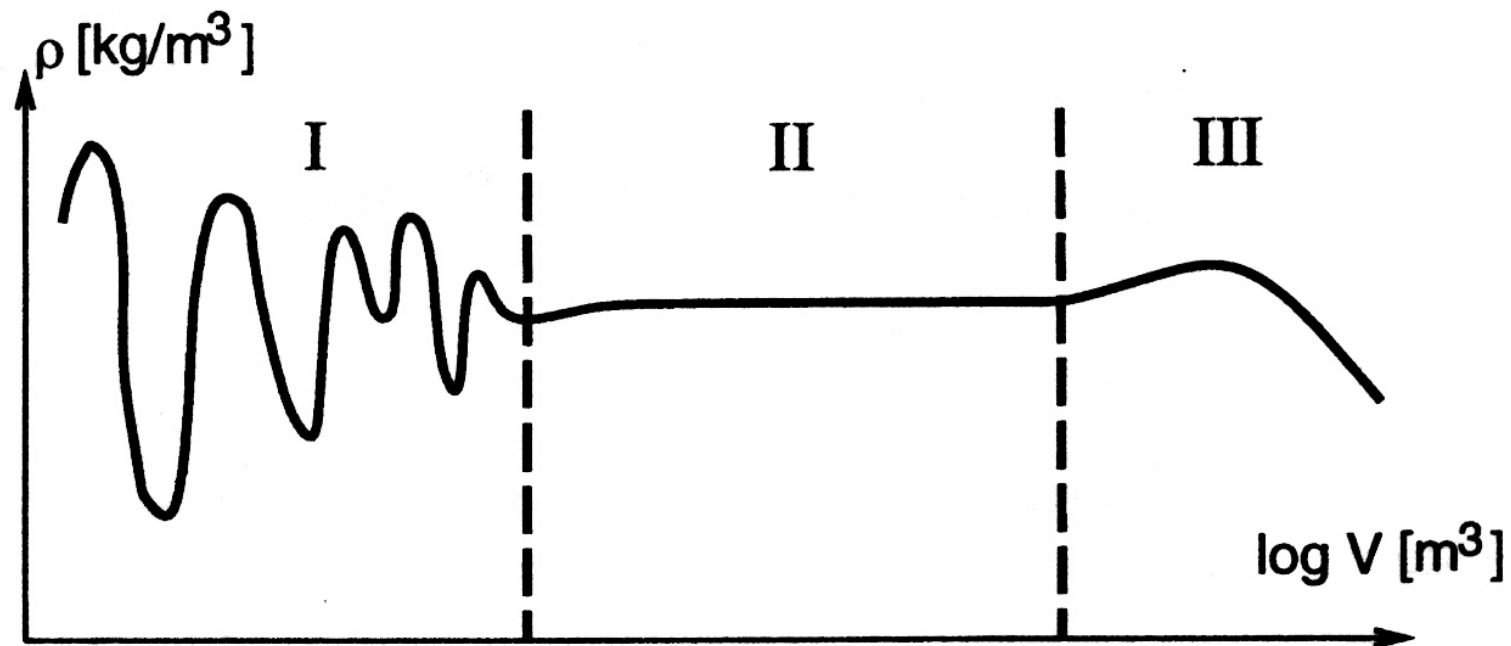
Matematická definice kontinua:

- 1. Matematické funkce popisující kontinuum jsou spojitě včetně svých derivací**
- 2. Připouští se konečný počet ploch, kde podmínka 1. neplatí**

Kontinuum představuje spojitě prostředí, kde jsou všechny veličiny definovány pro nekonečně malý bod.

Pojem kontinua

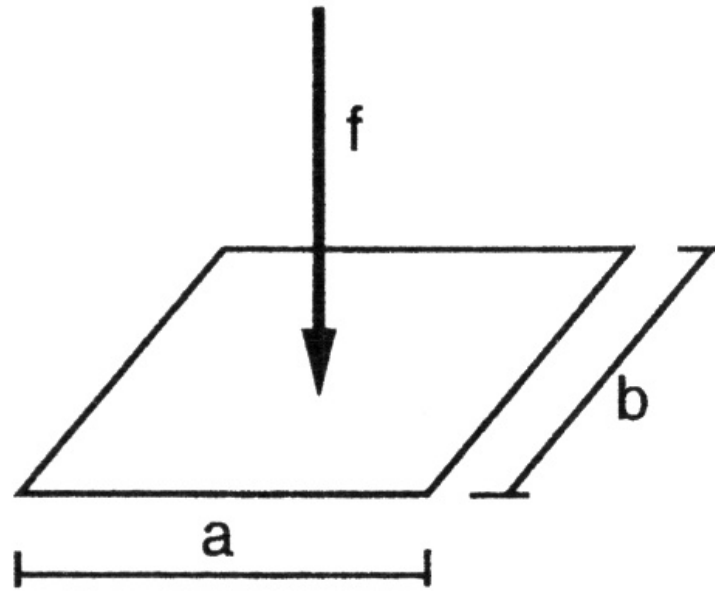
Průběh měřené veličiny v závislosti na měřítku:



Napětí

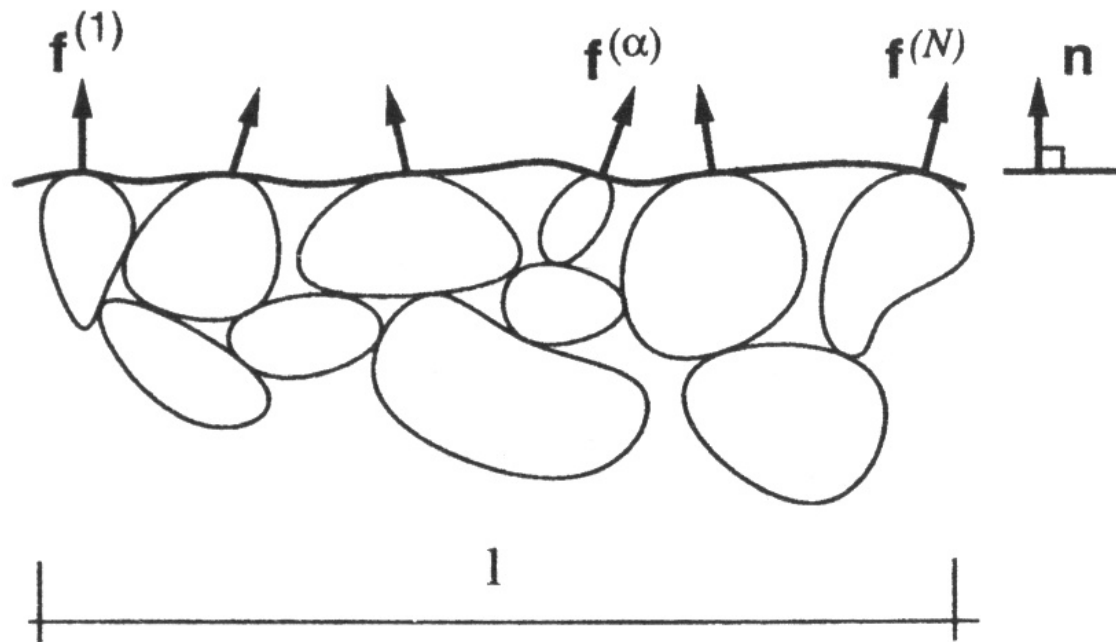
Pojem napětí zavedl Cauchy v roce 1793. Definoval jej jako sílu působící na danou plochu:

$$\sigma = \frac{f}{ab}$$



Napětí v zemině

Představme si řez zeminou dostatečně veliký na to, aby se blížil rovině a jeho plocha byla dostatečně velká na to, aby se výsledek dal interpretovat v rámci kontinua.



Výsledný *vektor* síly působící v rovině řezu o ploše A získáme sečtením všech vektorů síly na kontaktech mezi zrny

$$\mathbf{f}^* = \sum_i \mathbf{f}^{(i)}$$

Celkový vektor síly má komponenty

$$\mathbf{f}^* = [f_1^*, f_2^*, f_3^*]$$

Tenzor napětí \mathbf{T} (či $\boldsymbol{\sigma}$) definujeme jako lineární transformaci

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

pomocí níž můžeme vypočítat vektor napětí $\mathbf{t} = \mathbf{f}^*/A$ pro libovolnou rovinu s normálou \mathbf{n} .

Tedy pro rovinu řezu s normálou

$$\mathbf{n} = [1, 0, 0]$$

vypočteme první tři komponenty tenzoru napětí jako

$$T_{11} = f_1^*/A \quad T_{21} = f_2^*/A \quad T_{31} = f_3^*/A$$

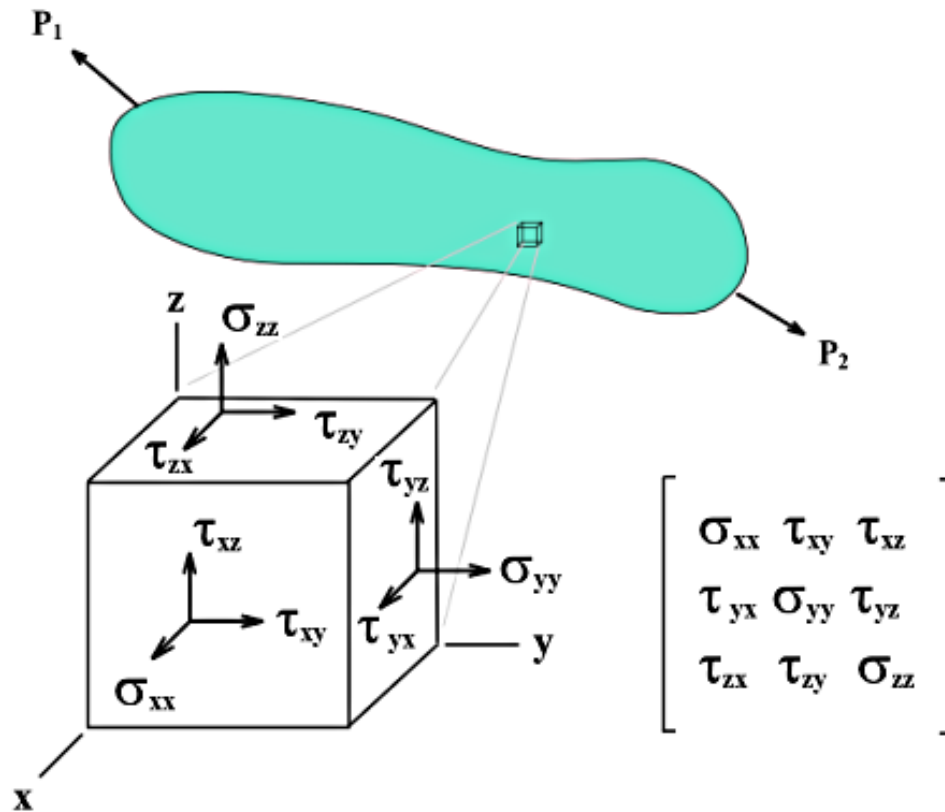
Obdobně pro řez s

$$\mathbf{n} = [0, 1, 0]$$

získáme

$$T_{12} = f_1^*/A \quad T_{22} = f_2^*/A \quad T_{32} = f_3^*/A$$

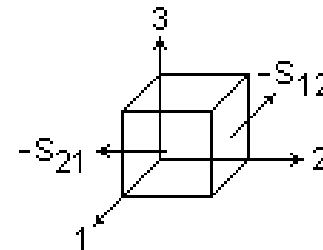
Význam tenzoru napětí pro infinitezimální krychli kontinua



Je zřejmé, že diagonální složky tenzoru napětí (T_{11} , T_{22} , T_{33}) jsou kolmé na infinitezimální krychli kontinua, nazýváme je proto napětí *normálová* (někdy značíme σ). Ostatní složky se nazývají napětí *smyková* (někdy značíme τ).

- Pozn: definice *napětí* je jednoznačná pokud známe velikost plochy A . Situace se komplikuje pokud uvažujeme velké deformace materiálu, jak uvidíme v části "velká přetvoření".
- Pokud v bodě kontinua nepůsobí další síly či momenty (momenty mohou působit v tzv. polárním kontinuu) a *bod je v rovnovážné poloze*, tenzor napětí je symetrický, tzn.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$



Symmetry of the Stress Tensor

- Pro každý tenzor napětí lze pootočit soustavu souřadnic tak, aby smyková napětí (T_{ij} pro $i \neq j$) byla rovná nule. Nenulové diagonální členy se pak nazývají *hlavní* napětí. **Hlavní napětí jsou vlastní čísla tenzoru napětí.**

Znaménková konvence

Komplikaci v orientaci v geotechnických výpočtech často přinášejí dvě různé *znaménkové konvence*.

- V *mechanice kontinua* je zaběhnutá znaménková konvence jež označuje tahová napětí a přetvoření jako kladná, tlaková jako záporná.
- Tato konvence má za následek že výpočty geotechnických úloh jsou méně přehledné, neboť v geotechnice ve většině případů figurují tlaková napětí. Proto *mechanika zemin* většinou uvažuje tlaková napětí jako pozitivní.

My budeme většinou uvažovat znaménkovou konvencí *mechaniky kontinua*.

Invarianty napětí

Pro popis stavu napjatosti často využíváme invarianty napětí, jejichž hodnota je nezávislá na souřadném systému.

- **Střední napětí** p je modifikovaným prvním invariantem napětí:

$$p = -\frac{I_1}{3} = -\frac{\text{tr} \mathbf{T}}{3}$$

- **"Deviátorové" napětí** q je modifikovaný druhý invariant deviátoru napětí:

$$q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev } \mathbf{T}\|$$

Pro axisymetrický stav s diagonálním tenzorem napětí (např. pro běžnou triaxiální zkoušku):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_a & 0 & 0 \\ 0 & T_r & 0 \\ 0 & 0 & T_r \end{bmatrix}$$

se vztahy pro výpočet invariantů redukuje na

$$p = - \frac{T_a + 2T_r}{3}$$

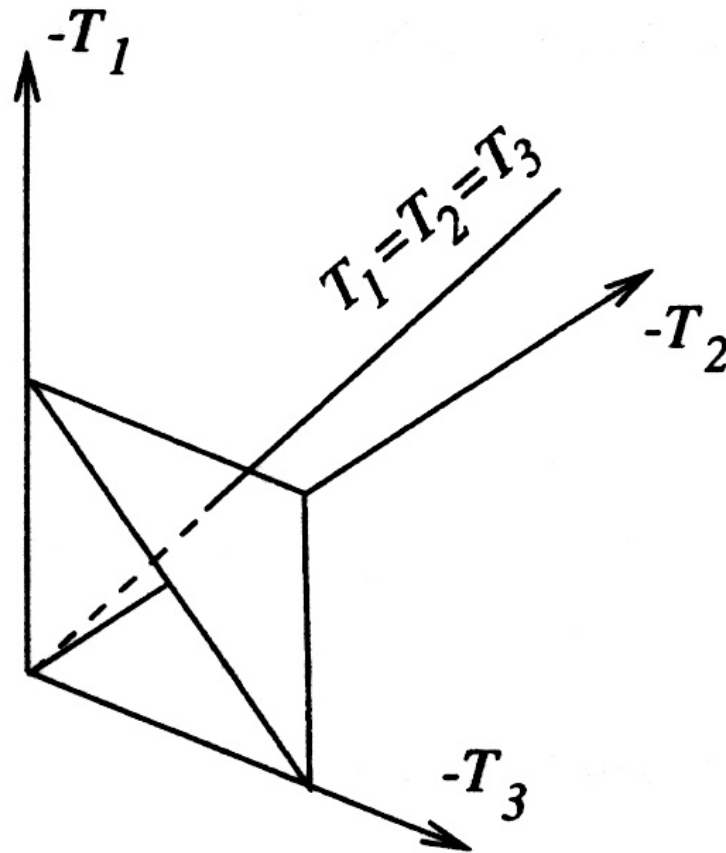
$$q = |T_a - T_r|$$

- Často se však pro triaxiální stav uvažuje $q = T_a - T_r$
- Pro definici třetího používaného invariantu napětí si musíme vysvětlit pojem *deviátorová rovina*.

Deviátorová rovina

Deviátorová rovina je určena podmínkou

$$\text{tr}\mathbf{T} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T_3$$

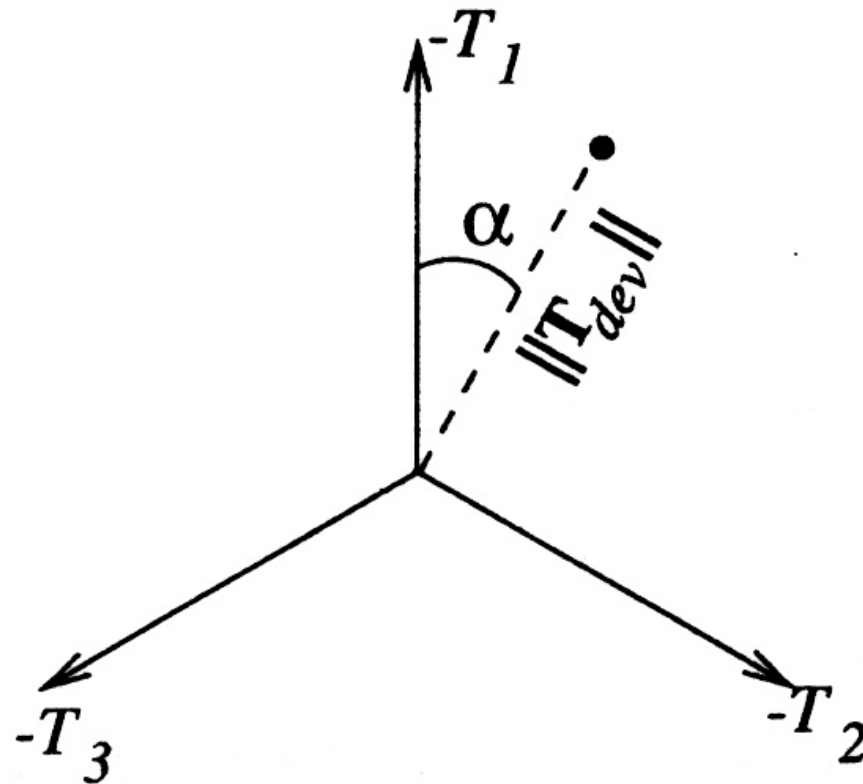


Třetí invariant napětí

V deviatorové rovině je *konstantní* první invariant napětí (střední napětí p). Je proto vhodná pro zobrazení stavu napjatosti s proměnným druhým a třetím invariantem napětí.

Jako třetí invariant napětí se většinou uvažuje *Lodeho úhel* α

$$\cos 3\alpha = -\frac{J_3}{2} \left(\frac{3}{J_2} \right)^{3/2}$$



Invarianty napětí

Stav napjatosti tedy většinou charakterizujeme pomocí třech invariantů p , q a α .

Takto definovaný stav napětí ovšem *není jednoznačný* ! Odpovídá mu šest různých kombinací hlavních napětí T_1 , T_2 a T_3 .

Takovýto popis stavu napjatosti je ale dostatečný pro *izotropní materiál*, který má ve všech směrech stejné vlastnosti (na pořadí hlavních napětí u něj nezáleží).

Mohrova kružnice

Mohrova kružnice není nic jiného než *grafické znázornění rotace soustavy souřadnic* pro tenzor napětí.

budeme demonstrovat pro případ *rovinné napjatosti*. Tenzor napětí má formu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mohrova kružnice

Při pootočení soustavy souřadnic o úhel θ můžeme nové komponenty tenzoru napětí vyjádřit jako (vyplývá z $\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$)

$$\sigma'_{xx} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Mohrova kružnice

Předchozí rovnice lze zkombinovat a získat

$$\left(\sigma'_{xx} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau'_{xy})^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

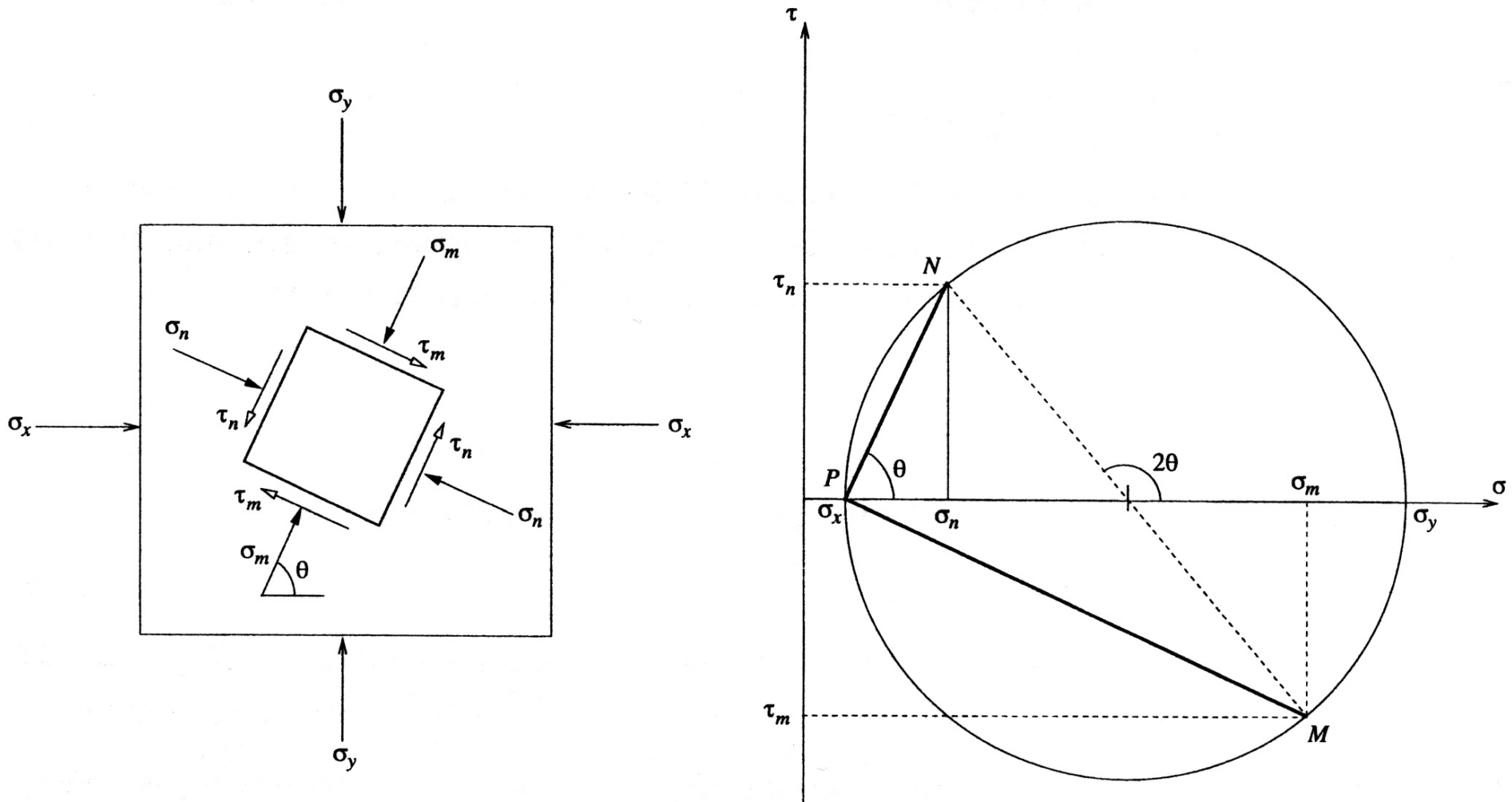
Což je *rovnice kružnice* ve formě

$$(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$$

kde

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad \text{a} \quad x_0 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

Mohrova kružnice



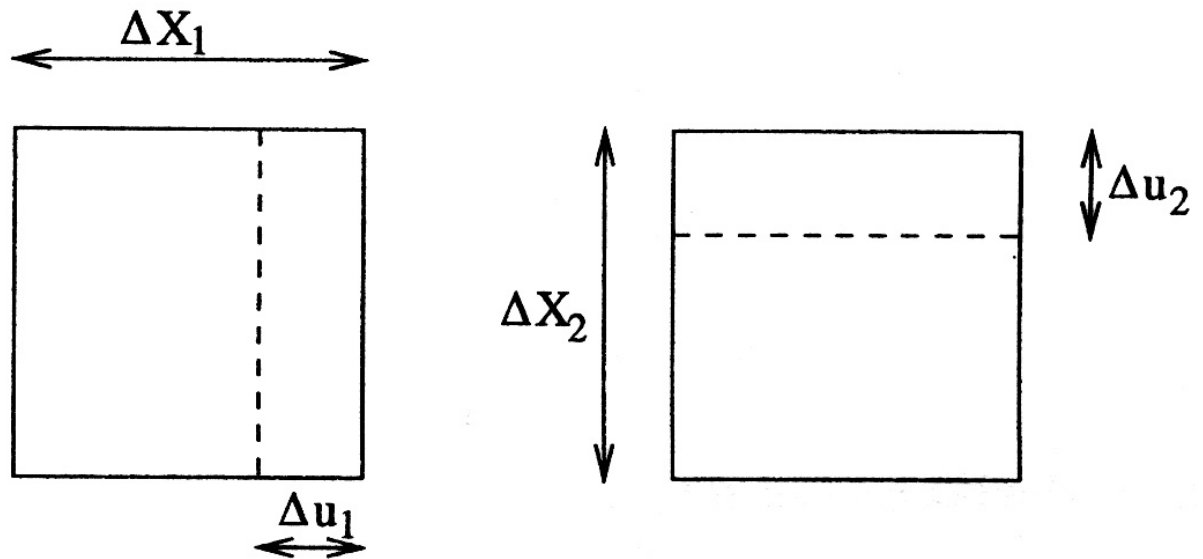
Malá přetvoření

Přetvořením se označuje změna délky vztažená k původní délce. Následující výpočty jsou přesně platné pouze pro *infinitesimální* (nekonečně malá) přetvoření.

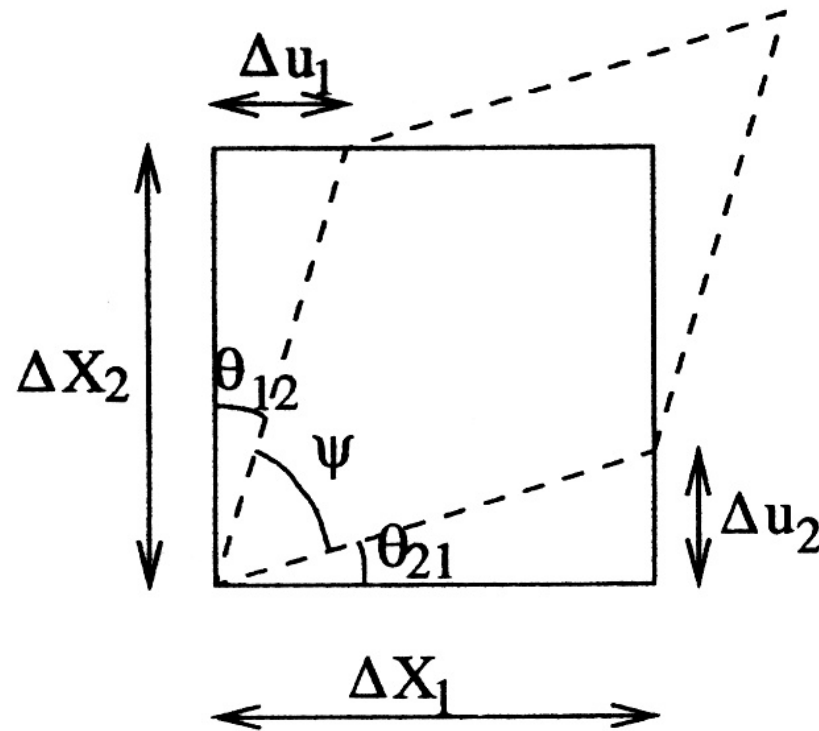
Jednoosé přetvoření:

$$\epsilon_{11} \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta X_1}$$

$$\epsilon_{22} \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta X_2}$$



Pro čistý smyk jenž můžeme znázornit:



definujeme úhlové přetvoření γ_{12} jako

$$\gamma_{12} = 90^\circ - \psi = \theta_{12} + \theta_{21} \approx \tan \theta_{12} + \tan \theta_{21} = \frac{\Delta u_1}{\Delta X_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta X_1}$$

V definici tenzoru malých přetvoření musíme zohlednit, že k přetvoření dochází pohybem bodů tělesa, ovšem *ne každý pohyb bodů tělesa vyvolává přetvoření* ! Translační a rotační pohyb nezpůsobují přetvoření a proto ani změnu napjatosti.

Z toho důvodu zavádíme *gradient posunu* \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = (\text{pro 2D}) \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$

jež je očištěn od translace tuhého tělesa.

Gradientu posunu \mathbf{K} můžeme rozložit na část způsobující přetvoření a část způsobující rotaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

ϵ je *tenzor malých přetvoření* a Ω je *tenzor rotace* jež obecně počítáme jako

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)$$
$$\Omega = \frac{1}{2} (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T)$$

Invarianty přetvoření

Pro přetvoření využíváme následující invarianty:

- Objemové přetvoření ϵ_v

$$\epsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})$$

- Smykové přetvoření ϵ_s

$$\epsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\text{dev}(\boldsymbol{\epsilon})\|$$

Pro axisymetrický stav s diagonálním tenzorem přetvoření (např. pro běžnou triaxiální zkoušku):

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_r \end{bmatrix}$$

se vztahy pro výpočet invariantů redukuje na

$$\epsilon_v = \epsilon_a + 2\epsilon_r$$

$$\epsilon_s = \frac{2}{3}|\epsilon_a - \epsilon_r|$$

- Pro triaxiální zkoušku se často uvažuje $\epsilon_s = 2/3(\epsilon_a - \epsilon_r)$.
- Dále lze ukázat, že pro *nedrénovanou* triaxiální zkoušku platí $\epsilon_s = \epsilon_a$ (a samozřejmě $\epsilon_v = 0$).

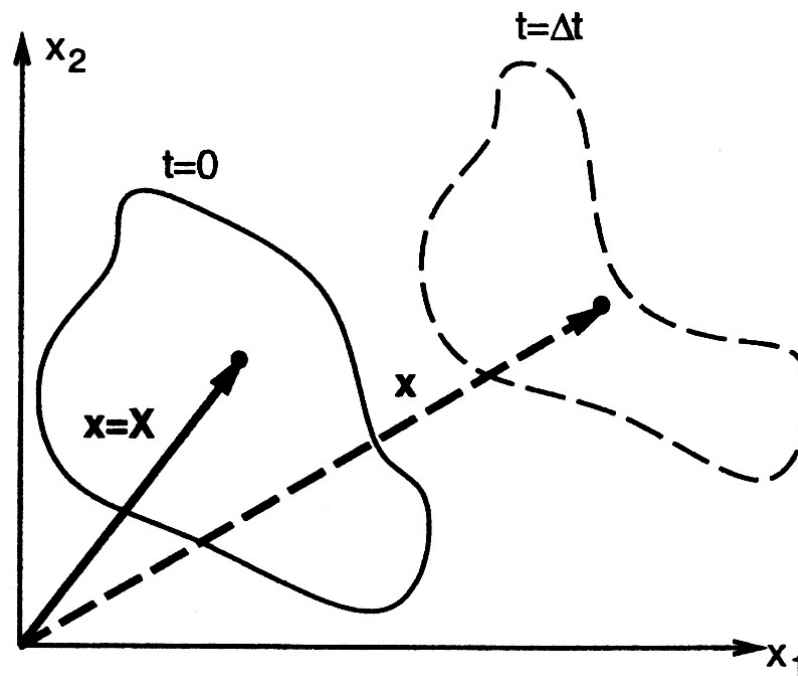
Velká přetvoření

Infinitezimální (malá) přetvoření jsou dostatečná pro řešení úloh kde dochází pouze k malým defomacím. V případě větších přetvoření a větších rotací (např. pohyb na smyková ploše. . .) je nutné uvažovat deformace konečné velikosti.

Rule of thumb: Pokud deformace jsou dostatečně malé, že je při pohledu na deformovanou geometrii nezpozorujeme, stačí počítat s malými přetvořeními. V opačném případě musí být zavedeny korekce popsané v této kapitole.

Popis pohybu

Při popisu pohybu rozlišujeme referenční konfiguraci (počáteční, nedeformovanou), a aktuální konfiguraci, tak jak je zobrazeno na obrázku:



Polohu bodu popisujeme ve dvou souřadných systémech:

Prostorové souřadnice \mathbf{x}

Materiálové souřadnice \mathbf{X} (vztahujeme k referenční konfiguraci)

Pohyb bodu můžeme studovat dvěma různými způsoby:

- *Prostorová (Eulerova) formulace*

Prostorová souřadnice \mathbf{x} je nezávislá proměnná. Sledujeme pohyb materiálu pevným bodem v prostoru. Materiálovou souřadnici \mathbf{X} vypočteme z prostorových souřadnic pomocí

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

Tento popis používáme například pro popis pohybu kapalin.

- *Materiálová (Lagrangeova) formulace*

Pohyb materiálu charakterizujeme vzhledem k referenční konfiguraci, materiálová souřadnice \mathbf{X} je nezávislá proměnná. Prostorové souřadnice pak vypočteme pomocí funkce χ

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

Tento popis používáme pro pevné látky, včetně zemin.

Lagrangeova formulace

V materiálové (Lagrangeově) formulaci pohyb popisujeme vzhledem k referenční konfiguraci. Podle konkrétní volby referenční konfigurace rozlišujeme:

- *Totální Lagrangeova formulace*

Za referenční konfiguraci je brán počáteční nedeformovaný stav. Vhodná pro popis elastického materiálu kde lze nalézt nedeformovaný stav odpovídající stavu s nulovou napjatostí.

- *Aktualizovaná Lagrangeova formulace*

Za referenční konfiguraci uvažujeme aktuální konfiguraci. Referenční konfigurace se tedy mění v každém výpočtovém kroku. Vhodná pro materiály, kde nelze definovat stav s nulovou napjatostí. Mezi tyto materiály patří i geomateriály.

Popis pohybu

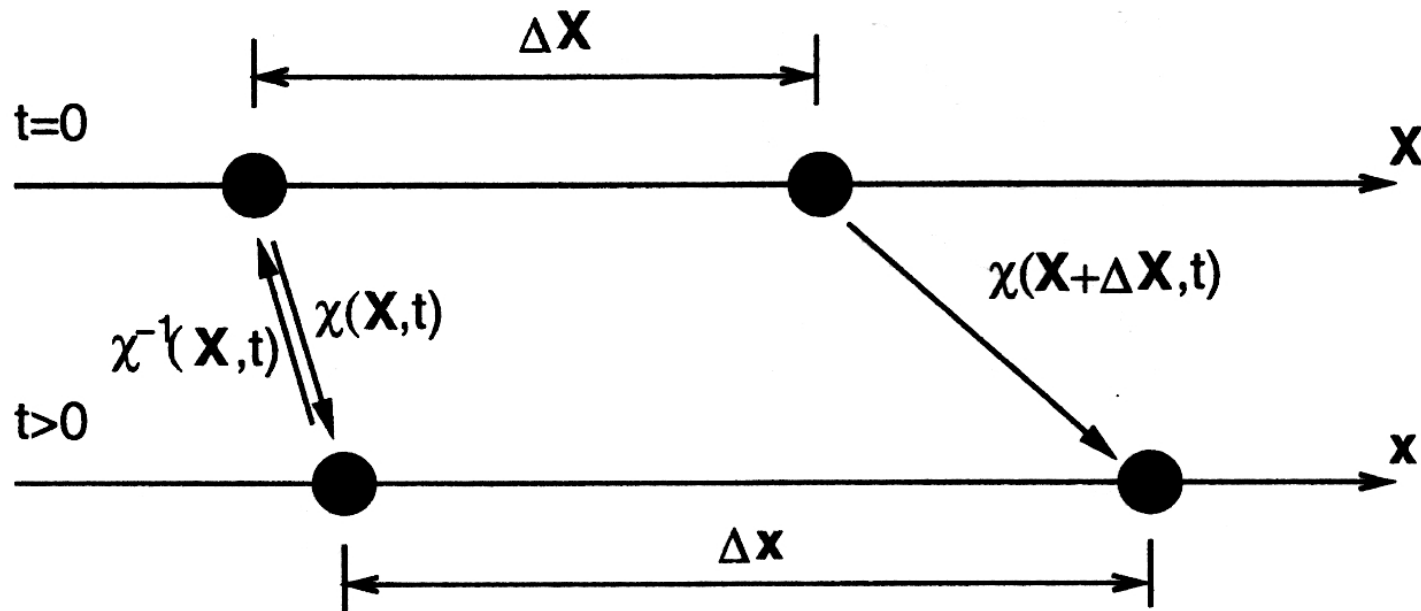
Pro popis polohy bodů tělesa je nutno zvolit *referenční konfiguraci*. U pružných materiálů můžeme za referenční konfiguraci volit nedeformovaný tvar při nulovém napětí. U nelineárních materiálů většinou za referenční konfiguraci volíme počáteční stav.

Každá částice je dána svojí polohou v referenční konfiguraci (\mathbf{X}). Její pohyb je popsán její aktuální pozicí (čas t) v prostorových souřadnicích (\mathbf{x}).

Posun částice \mathbf{u} lze tedy vyjádřit

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t_0)$$

Popis pohybu



Deformace materiálu (deformační gradient)

Použití rovnice

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

neumožňuje rozlišení mezi *přetvořením* materiálu a *translací* tuhého tělesa (viz obr.)

Z toho důvodu zavádíme tzv. *deformační gradient*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{tj.} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

čímž translační pohyb eliminujeme.

Význam deformačního gradientu

Pokud jsou v počáteční konfiguraci dvě částice od sebe vzdálené $d\mathbf{x} = d\mathbf{X}$, bude jejich vzdálenost v čase t rovna

$$d\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t)$$

Pro $\|d\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ lze psát

$$\chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

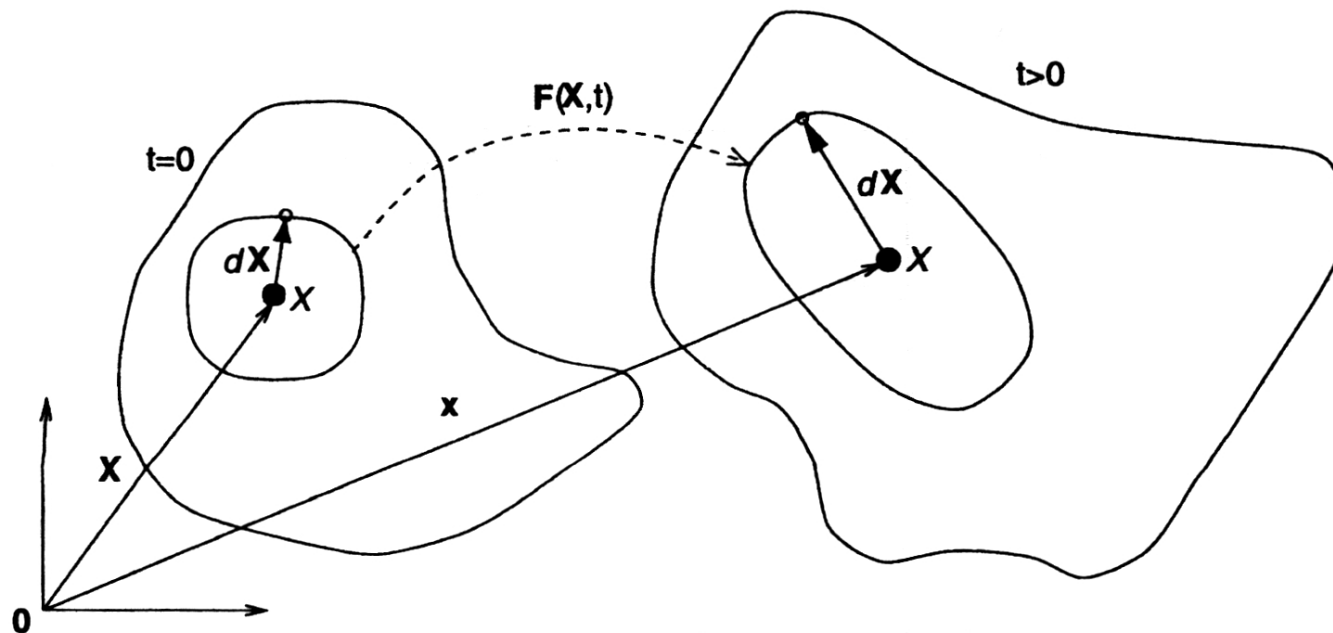
takže

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

\Rightarrow Tenzor deformačního gradientu \mathbf{F} transformuje okolí částice X z referenční konfigurace do aktuální konfigurace.

Deformační gradient

Význam deformačního gradientu:



Deformační gradient je *oproštěn od translace tuhého tělesa*.

Polární rozklad deformačního gradientu

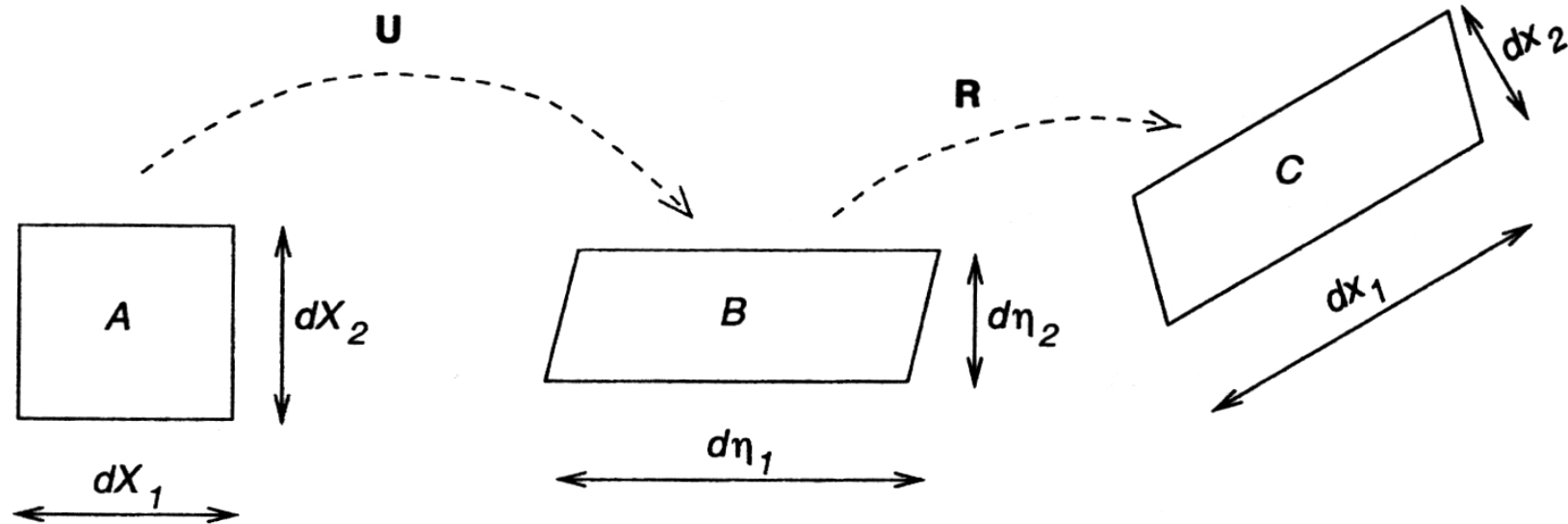
Jak vyplývá z předchozího obrázku, deformační gradient je oproštěn od *translace* tuhého tělesa, ovšem stále je v něm zahrnuta *rotace* tuhého tělesa, která také nezpůsobuje změnu stavu napjatosti.

Pro *eliminaci* vlivu rotace využíváme tzv. *polární rozklad deformačního gradientu* (aditivní rozklad jako v případě tenzoru malých přetvoření je zde nepřesný).

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

Kde \mathbf{R} je ortogonální tenzor ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$) vyjadřující rotaci (konceptně ekvivalentní tenzoru \mathbf{Q} popisující rotaci soustavy souřadnic z minulé části), tenzory \mathbf{U} a \mathbf{V} vystihují pouze deformaci tělesa a nazýváme je *pravý a levý tenzor deformace*.

Interpretace polárního rozkladu



Nejprve dojde k změně tvaru tělesa podle tenzoru \mathbf{U} a pak k jeho rotaci danou tenzorem \mathbf{R} . Při aplikaci tenzoru \mathbf{V} dojde nejprve k rotaci, pak ke změně tvaru dle \mathbf{V} .

Green-Lagrangeův tenzor přetvoření

Greenův (Green-Lagrangeův) tenzor přetvoření \mathbf{E} je jedním ze dvou nejpoužívanějších způsobů popisu přetvoření (druhým je tenzor rychlosti deformace \mathbf{D} (viz. dále)).

Greenův (Green-Lagrangeův) tenzor přetvoření popisuje změnu délky elementu o původní délce $d\mathbf{X}$ následujícím způsobem:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}$$

Z čehož lze ukázat, že

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$$

Popis přetváření materiálu

Greenův tenzor přetvoření lze zapsat i pomocí tenzorů \mathbf{U} (nebo \mathbf{V}):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{1})$$

z čehož je zřejmé, že je tato míra přetvoření očištěna od translace a rotace tuhého tělesa.

Rychlost deformace

V případě popisu neelastického materiálu nám nestačí znát počáteční a finální stav, ale také celou historii deformace. Pro její popis využíváme *rychlost částice* (matematicky snadnější než popis celé trajektorie částice).

Rychlost částice je rovna derivaci jejího pohybu podle času, tedy

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$$

Gradient vektoru rychlosti

Stejně jako u deformace, vektor rychlosti \mathbf{v} v sobě slučuje jak *přetvoření* tělesa způsobující změnu napjatosti, tak i *rotaci* a *translaci* tuhého tělesa, jež chceme z formulace eliminovat.

Pro eliminaci translace zavádíme *gradient vektoru rychlosti* v prostorových souřadnicích \mathbf{L} (obdobně jako jsme zavedli deformační gradient \mathbf{F} . \mathbf{F} nám mapoval změnu *pozice*, \mathbf{L} stejným způsobem mapuje změnu *rychlosti*)

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{tj.} \quad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Gradient vektoru rychlosti \mathbf{L} je možno *aditivně* rozložit na *tenzor rychlosti deformace* \mathbf{D} (jež vystihuje deformaci tělesa) a *tenzor rychlosti rotace* \mathbf{W} (jež vystihuje míru rotace) obdobně, jako jsme rozkládali *gradient posunu* (viz. ←)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Platí tedy

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

Tenzor rychlosti deformace

Tenzor rychlosti deformace \mathbf{D} je veličina charakterisující přetváření materiálu jíž budeme využívat v konstitučních vztazích.

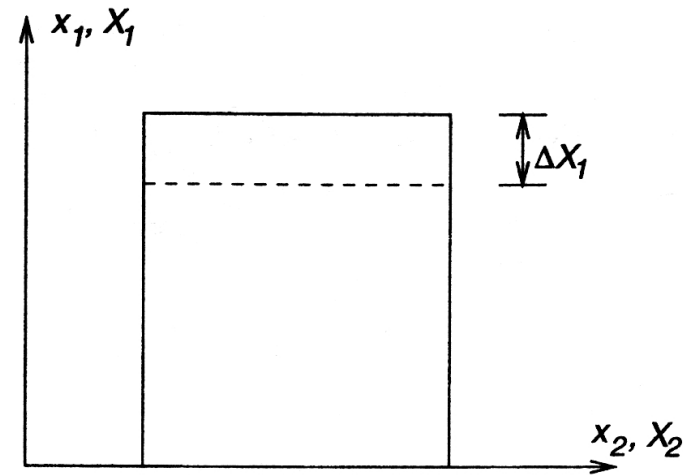
Pro malá přetvoření a $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ platí

$$\mathbf{D} \simeq \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

Pro větší přetvoření jsou však obě hodnoty odlišné, neboť \mathbf{D} se vztahuje k aktuální konfiguraci (viz 1D příklad dále).

Interpretace různých mír přetvoření v 1D

Popis kinematiky materiálu si ukážeme na příkladu *jednoosého stlačení* (oedometrická zkouška).



Interpretace různých mír přetvoření v 1D

Poloha bodu \mathbf{X} v čase t je dána

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} x_1 = X_1 + \Delta X_1 = X_1 + \dot{\epsilon}_1 \Delta t X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$\dot{\epsilon}$ značí *rychlost přetváření*, tj.

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$$

Deformační gradient v 1D

Pro případ *jednoosé deformace* by deformační gradient byl roven (z $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \dot{\epsilon}_1 \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{F} nezávisí na \mathbf{X} , jedná se tedy o *homogenní přetváření*.

Green-Lagrangeův tenzor přetvoření v 1D

Green-Lagrangeův tenzor přetvoření by tedy pro daný případ měl s využitím $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$ takovouto formu:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 + \frac{1}{2}(\epsilon_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rychlost deformace v 1D

Pro jednoosou stlačitelnost můžeme rychlost vyjádřit (viz. ←) v referenční konfiguraci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\epsilon}_1 X_1 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Rychlost deformace v 1D

Rychlost v prostorových souřadnicích pak získáme (s využitím

$$X_1 = x_1 / (1 + \epsilon_1))$$

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_1}{1 + \epsilon_1} x_1 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Pro předepsanou rychlost přetvoření $\dot{\epsilon}_1$ tedy rychlost částice v_1 závisí i na celkové deformaci ϵ_1 .

Tenzor rychlosti deformace v 1D

Pro případ jednoosé stlačitelnosti platí (viz. \leftarrow , $\mathbf{L} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ a $\mathbf{W} = \mathbf{0}$).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\epsilon}_1}{1 + \epsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I z tohoto jednoduchého příkladu je tedy zřejmé, že $\dot{\epsilon} \neq \mathbf{D}$. Nicméně, pro $\epsilon \rightarrow \mathbf{0}$ platí $\dot{\epsilon} \simeq \mathbf{D}$.

Přirozené přetvoření

Definice tenzoru rychlosti deformace ukazuje na problém výpočtu přetvoření při laboratorních experimentech. Pro náš 1D případ jsme axiální přetvoření počítali jako

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta X_1}{X_1} = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{h - h_0}{h_0}$$

takto definované přetvoření nazýváme *inženýrské* (*engineering strain*)

Přirozené přetvoření

Do konstitučních vztahů ovšem vstupuje tenzor rychlosti deformace. Z časové integrace

$$D_1 = \frac{\dot{\epsilon}_1}{1 + \epsilon_1}$$

(viz předchozí folie) vyplývá

$$\epsilon_1^{nat} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{\epsilon}_1}{1 + \epsilon_1} dt = \ln(1 + \epsilon_1)$$

Takto definované přetvoření nazýváme *přirozené* (*natural strain*).
Pozn: interpretace pomocí integrace \mathbf{D} je platná pouze v 1D.

Pro porovnání předpovědí konstitučních modelů s experimenty by měla být experimentální data vyjádřena v přirozených přetvořeních!

Tenzor napětí

Různé definice přetvoření jsou asociovány s různými definicemi tenzoru napětí. Je to proto, že vyžadujeme, aby páry napětí vs. přetvoření byly sdruženy pro výpočet práce vnitřních sil (*work conjugate*), čili aby platilo

$$\dot{W}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

pro každý pár napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a přetvoření \mathbf{D} .

Cauchyho napětí

Již probírané *Cauchyho napětí* σ je asociováno s tenzorem rychlosti deformace \mathbf{D} . *Cauchyho napětí* se také nazývá *fyzikální* či *skutečné* (*physical stress, true stress*)

σ se vztahuje k referenční konfiguraci, která odpovídá aktuální konfiguraci (jedná se tedy o míru napětí odpovídající *Aktualizované Lagrangeově formulaci*).

Jak již bylo řečeno dříve, *Aktualizovaná Lagrangeova formulace* je vhodná pro modelování geomateriálů, proto v našich aplikacích používáme pro popis napjatosti *Cauchyho napětí*.

2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

Další používanou mírou napjatosti je *2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí* \mathbf{S} .

2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí \mathbf{S} je *work conjugate* s rychlostí *Green-Lagrangeova* tenzoru přetvoření $\dot{\mathbf{E}}$, platí tedy

$$\dot{W}^{int} = \int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S} d\Omega_0$$

\mathbf{S} se vztahuje k referenční konfiguraci, která odpovídá počáteční konfiguraci (jedná se tedy o míru napětí odpovídající *Totální Lagrangeově formulaci*).

Přepočet jednotlivých formulací napětí a přetvoření

Znalost deformačního gradientu \mathbf{F} umožňuje přepočet jednotlivých formulací napětí a přetvoření. Pro napětí platí

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \qquad \mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

a pro přetvoření platí

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

kde

$$J = \det(\mathbf{F})$$

Objektivní rychlost napětí

Rychlost napětí lze definovat analogicky k rychlosti částice:

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$$

Takto definovaná rychlost napětí má být *nulová* při *rotaci* tuhého tělesa

Tuto podmínku splňuje rychlost *2. Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí* \dot{S} , ale ne rychlost *Cauchyho napětí* $\dot{\sigma}$.

Objektivní rychlost napětí

Pokud používáme *Cauchyho napětí* pro popis napjatosti, musíme zavést opravu pro rotaci tuhého tělesa. Výslednou rychlost napětí, která je využívána v konstitučních vztazích pro geomateriály, nazýváme *objektivní rychlost napětí*.

Z více možných definicí *objektivní rychlosti napětí* je nejčastěji využívána tzv. *Jaumannova rychlost napětí*

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \sigma$$

Pokud $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, pak evidentně platí $\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma}$ (např. běžná triaxiální zkouška).