Numerické modelování v aplikované geologii

David Mašín

Ústav hydrogeologie, inženýrské geologie a užité geofyziky
Přírodovědecká fakulta
Karlova Univerzita v Praze

Přednášky pro obor Geotechnologie

Obsah

Úvod do matematického modelování

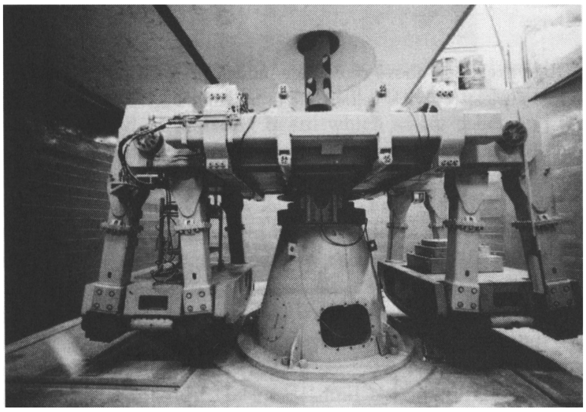
Způsoby řešení geomechanických úloh můžeme rozdělit na:

- *Observační*: Spolehnutí na pozorování, analogii a zkušenost
- *Semianalytické*: Kombinace observačních a matematických přístupů. Statistika, extrapolace, bez porozumění fyzikální podstaty jevů
- *Analytické a numerické*: Idealizace geologického prostředí matematickým modelem. Uzavřená (analytická) a numerická řešení.

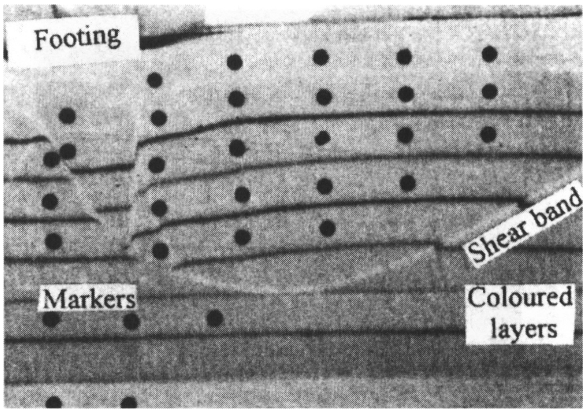
Přednáška se bude zabývat pouze posledním bodem.

Úvod do matematického modelování

V minulosti převládal zájem o analytické metody a fyzikální modelování (modelové zkoužky ve zmenšeném měřítku). – o něm si řekneme později.



Muir Wood (2004)



Bakir et al. (1994)

Úvod do matematického modelování

- Dnes, s rozvojem výpočetní techniky, začínají numerické metody nabývat výsadní postavení ve využití pro geotechnický design.
- Matematický model *je nástroj* pro pochopení problému, nikdy však ne *přesným řešením*. Pro jeho účelné využití je nutné znát jeho možnosti a omezení. Model vždy zjednodušuje velmi komplexní realitu. Je nutno dbát na to, aby byly vystihnuty nejdůležitější aspekty řešeného problému.

Úvod do matematického modelování

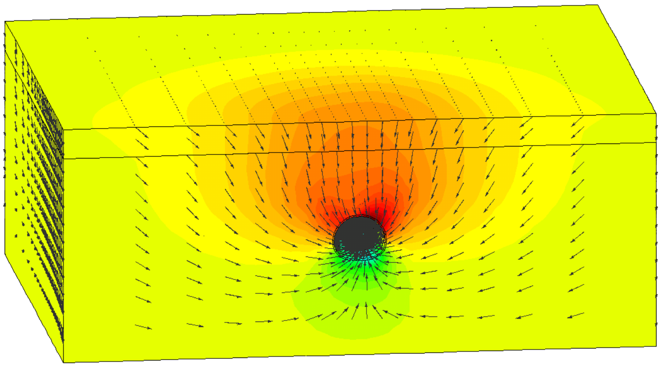
Postup při matematickém modelování

1. Zodpovězení otázky *PROČ* potřebuji matematický model. Co s jeho pomocí potřebuji vyřešit.
2. S tvorbou modelu je nutno začít *co nejdříve*. I předběžné výsledky mohou být využity pro plánování polních zkoušek a monitoringu.
3. Je nutno si rozmyslet kvalitativní očekávané výsledky. První model sestavený s pomocí kteréhokoliv programu nebude bezchybný! Chyby je možno odhalit jen pokud co nejjednodušší model postupně zesložiťujeme.
4. Vždy použijeme *co nejjednodušší* model, který stále vystihuje nejdůležitější aspekty řešeného problému.

Úvod do matematického modelování

Postup při matematickém modelování

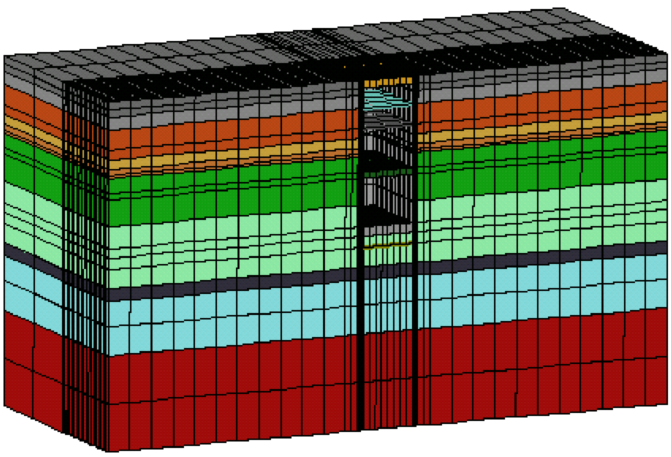
5. V případě, že není možno sestavit model jenž vystihne základní charakteristiky řešeného problému (např. 2D výpočet pro případ s výraznými trojrozměrnými efekty), je možno provést sérii simulací pro získání výsledků v mezních případech. Z rozmezí získaných hodnot je možno odhadnout správné výsledky.



Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

1. Řešení komplexních geotechnických úloh, kde neexistuje uzavřené (analytické) řešení (interakce několika vlivů, komplikované geologické podmínky . . .).

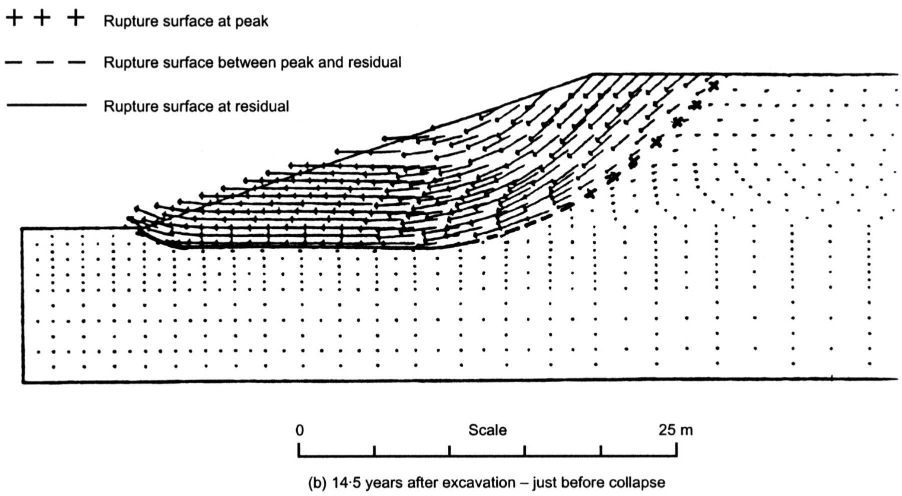


feat.nl (2005)

Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

2. Pochopení i rozvoj tradičních metod (progresívní porušování, hledání kritické smykové plochy)

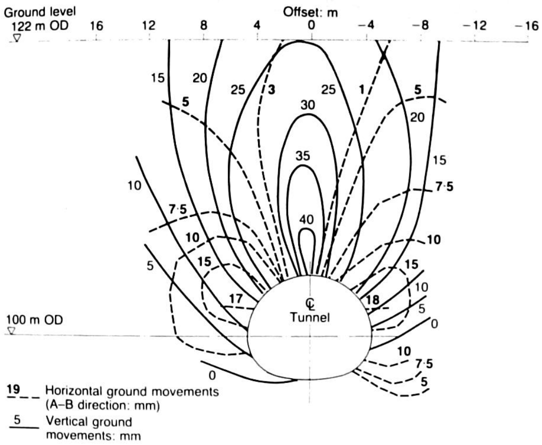


Potts et al. (1997)

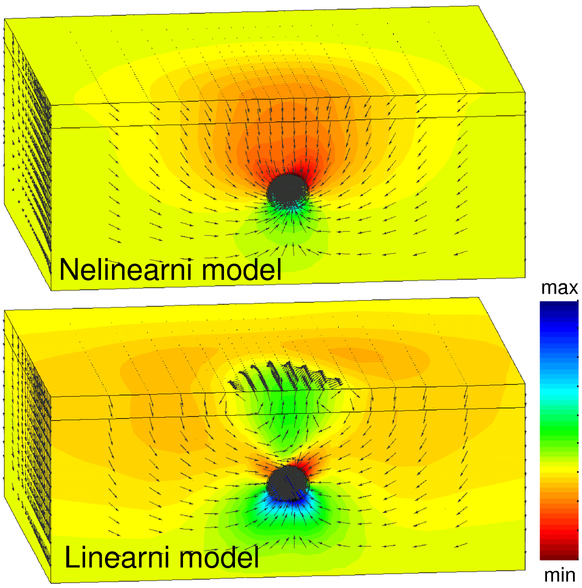
Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

3. Studie a zohlednění vlivu nelinearity (analytická řešení jsou pro lineárně pružný poloprostor, případně pro ideálně plastický materiál)



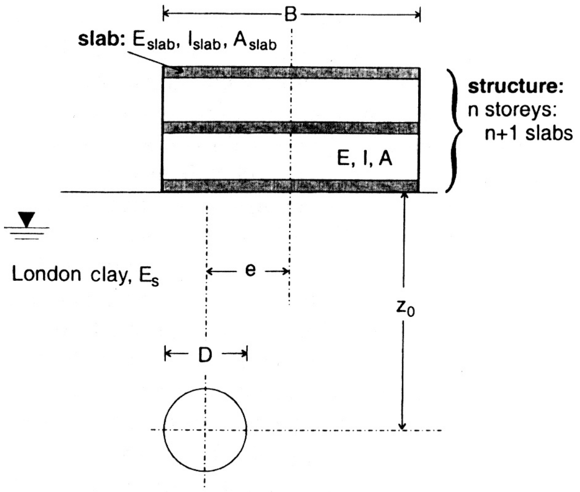
Deane and Basset (1995)

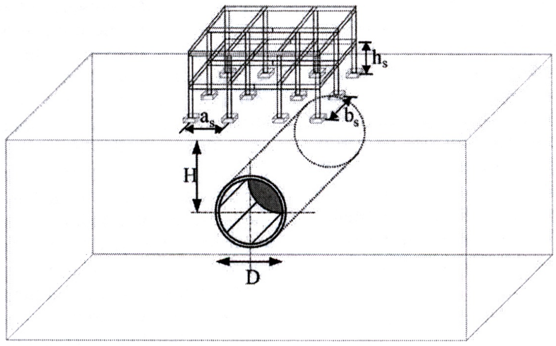


Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

4. Vývoj jednoduchých empirických návrhových vztahů z numerických studií (např. deformace budovy nad výrubem tunelu)





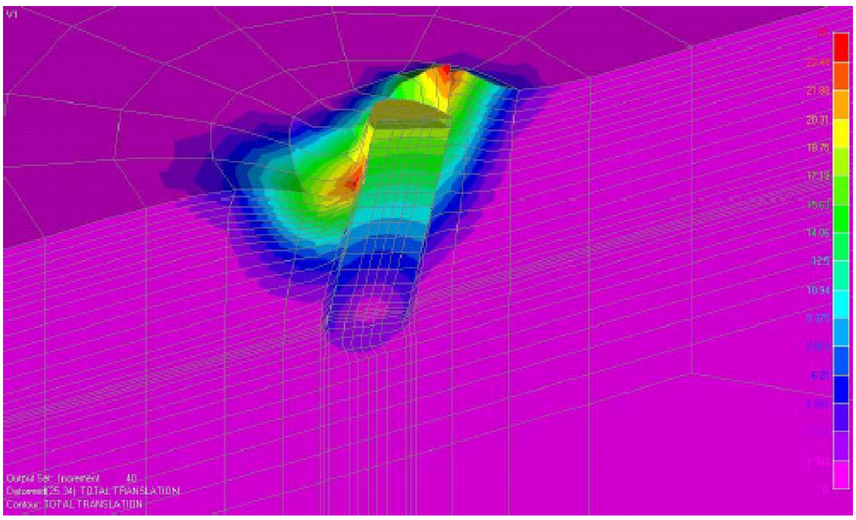
Mroueh and Shahour (2003)

Francius et al. (2004)

Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

5. Interpretace údajů z monitoringu, využití pro plánování nejvhodnějších monitorovacích bodů.

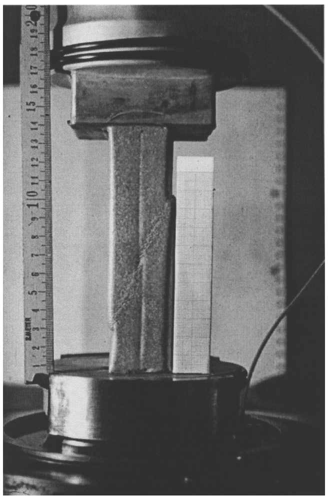


Rahim (2002)

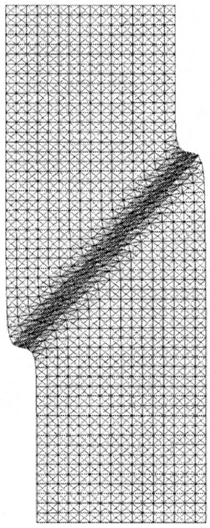
Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

6. Interpretace laboratorních zkoušek (nerovnoměrné rozdělení napětí, lokalizace deformace)



Vardoulakis (1977)



Tejchman (2004)

Úvod do matematického modelování

Oblasti aplikace počítačových modelů v geomechanice

7. Řízení laboratorního programu (nestandardní dráhy napětí v okolí geotechnické konstrukce)

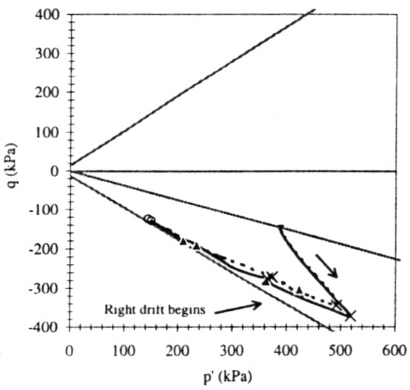


Figure 7(b). Stress path at the invert

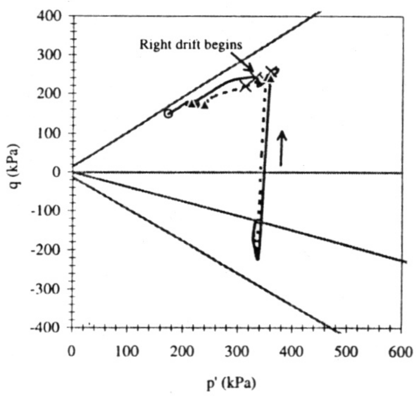


Figure 7(d). Stress path at the right springline

Tang et al. (2000)

Matematické pojmy

Maticový počet

- *Vektor:* Jednorozměrné pole skalárních veličin.
  Značíme **v**, v_i. Jednotlivé *komponenty* (složky):

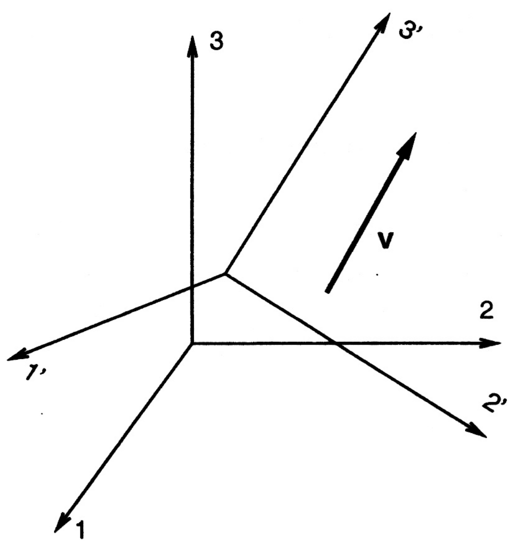
$$\mathbf{v} = v_i = [v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n]$$

  V našem případě budeme většinou uvažovat kartrézskou soustavu souřadnic, t.j. $n = 3$.

Matematické pojmy

Maticový počet

Pokud má vektor **fyzikální význam**, pak je nezávislý na soustavě souřadnic. (Dojde ke změně jeho *komponent*, ale význam zůstane zachován). Např. *vektor rychlosti*:



Matematické pojmy
Maticový počet

- Jeden vektor do druhého převádíme pomocí takzavené *lineární transformace*, kde lineárním operátorem je *matice*.

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

nebo píšeme

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

- Pokud má tato matice fyzikální význam (význam je nezávislý na soustavě souřadnic), nazýváme jí *tenzorem*.

Matematické pojmy
Maticový počet

- *Tenzor* (druhého řádu): Lineární transformace jednoho vektoru do jiného vektoru (viz. dále). Značíme $\mathbf{T}$, T_{ij}, $\boldsymbol{\sigma}$, σ_{ij}.
- Stejně jako vektor můžeme tenzor vyjádřit pomocí *komponent* v určité *soustavě souřadnic*. Vektor je jednorozměrné pole skalárních veličin, tenzor druhého řádu můžeme vyjádřit pomocí matice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Matematické pojmy

Zápis operací s vektory a maticemi

Budeme používat tzv, *indexový* zápis. Bude využíváno tzv. Einsteinovo indexování:

> *Pokud se v součinu nebo v samostatně stojící proměnné vyskytnou dva stejné indexy, provede se součet proměnných probíhající přes tyto indexy. Součet neprobíhá pro tzv. volný index, který se vyskytuje i u proměnné na levé straně rovnice.*

Matematické pojmy

Zápis operací s vektory a maticemi

Součet dvou matic:

$$T_{ij} = G_{ij} + H_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}+H_{11} & G_{12}+H_{12} & G_{13}+H_{13} \\ G_{21}+H_{21} & G_{22}+H_{22} & G_{23}+H_{23} \\ G_{31}+H_{31} & G_{32}+H_{32} & G_{33}+H_{33} \end{bmatrix}$$

Matematické pojmy

Zápis operací s vektory a maticemi

Násobení matice skalární veličinou:

$$C_{ij} = aT_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aT_{11} & aT_{12} & aT_{13} \\ aT_{21} & aT_{22} & aT_{23} \\ aT_{31} & aT_{32} & aT_{33} \end{bmatrix}$$

Matematické pojmy

Zápis operací s vektory a maticemi

Násobení matice vektorem:

$$b_i = T_{ij}d_j$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}d_1 + T_{12}d_2 + T_{13}d_3 \\ T_{21}d_1 + T_{22}d_2 + T_{23}d_3 \\ T_{31}d_1 + T_{32}d_2 + T_{33}d_3 \end{bmatrix}$$

Obdobně definujeme násobení dvou matic:

$$T_{ik} = \sigma_{ij}\epsilon_{jk}$$

Matematické pojmy

Zápis operací s vektory a maticemi

Skalární součin dvou vektorů:

$$c = t_i v_i$$

$$c = t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3$$

Matematické pojmy

Matematické pojmy

Zápis operací s vektory a maticemi

Tenzorový součin:

$$T_{ij} = b_i d_j$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 d_1 & b_1 d_2 & b_1 d_3 \\ b_2 d_1 & b_2 d_2 & b_2 d_3 \\ b_3 d_1 & b_3 d_2 & b_3 d_3 \end{bmatrix}$$

Matematické pojmy

Maticové operátory

Jednotková matice (tzv. Kroneckerovo delta) značíme 1_{ij}

$$1_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stopa

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} 1_{ij}$$

Euklidovská norma

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$$

Směr

$$\vec{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\|\sigma\|}$$

Deviátor

$$\mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ij} - 1_{ij}\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3}$$

Matematické pojmy

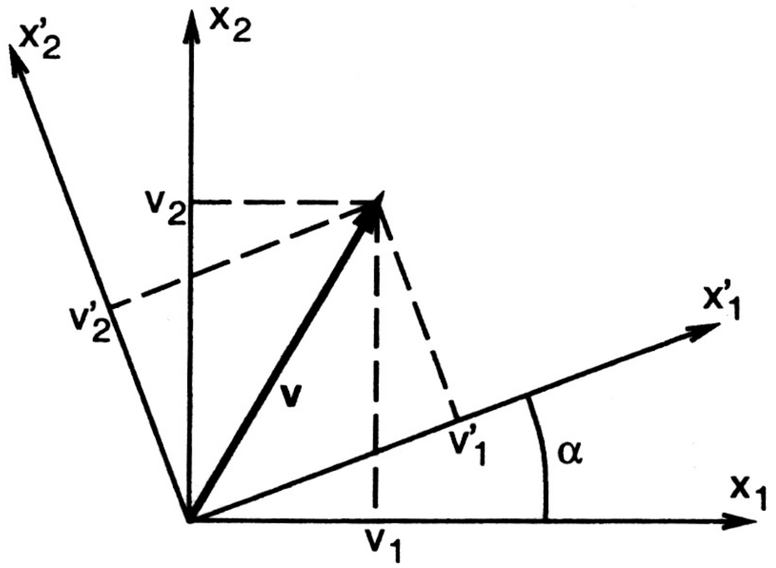
Rotace soustavy souřadnic

- Při změně soustavy souřadnic se změní komponenty vektoru či tenzoru, přestože jejich fyzikální význam zůstane zachován.
- Pro případ vektoru jsou jeho nové komponenty v čárkovaných souřadnicích počítány pomocí

$$v_i' = Q_{ij} v_j$$

Matematické pojmy

Rotace soustavy souřadnic



Matematické pojmy

Rotace soustavy souřadnic

Transformační matici Q je pro 2D úlohu možno zapsat jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Při pootočení souřadného systému pro *tenzor* se jeho nové komponenty vypočtou z

$$T'_{ij} = Q_{ik} T_{kl} Q_{jl}$$

Matematické pojmy

Rotace soustavy souřadnic a vlastní čísla

- Pro matici **T** hledáme takový skalár λ a vektor n, aby platilo

$$T_{ij}n_j = \lambda n_i$$

  n se označuje jako vlastní vektor a λ jako vlastní číslo.
- Rotaci souřadnic lze pro každou symetrickou matici ($T_{ij} = T_{ji}$) rotovat tak, že prvky mimo hlavní diagonálu jsou rovné nule.
- Nenulové diagonální prvky jsou pak rovny vlastním číslům matice.

Matematické pojmy

Invarianty tenzoru

Invarianty jsou skalární veličiny vypočtené ze složek tenzoru, jejichž hodnota se **nemění se změnou soustavy souřadnic**. Rozlišujeme tři invarianty, jež značíme I_1, I_2 a I_3.

1. invariant	$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{T})$
2. invariant	$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ij}T_{ij} - I_1^2)$
3. invariant	$I_3 = \det(\mathbf{T})$

Matematické pojmy

Invarianty tenzoru

Pro diagonální tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

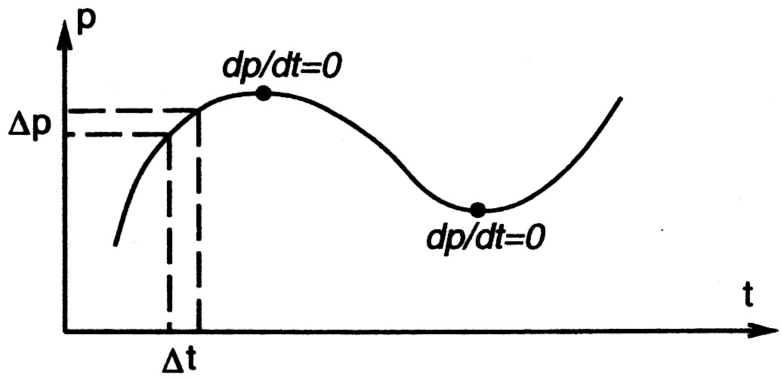
se invarianty tedy vypočtou

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$
$$I_2 = -(T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11})$$
$$I_3 = T_{11}T_{22}T_{33}$$

Matematické pojmy

Derivace

Reprezentuje velikost změny funkce v nekonečně malém intervalu



Matematická definice pro skalární funkci $p_{(t)}$

$$\frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Matematické pojmy

Derivace

Derivaci definujeme i pro vektorové funkce. Derivace vektorové funkce $p_{(t)}$ má komponenty:

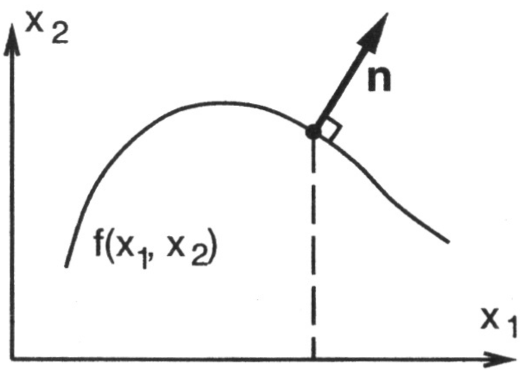
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \end{bmatrix}$$

Matematické pojmy

Gradient

Gradient udává směr normály k průběhu funkce. Pro funkci dvou proměnných $f_{(x_1,x_2)}$ zapisujeme

$$\text{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]$$



Matematické pojmy

Gradient

Gradient funkce $f_{(\boldsymbol{\sigma})}$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor, udává směr normály k ploše $f_{(\boldsymbol{\sigma})}$:

$$\frac{\partial f_{(\boldsymbol{\sigma})}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \end{bmatrix}$$

Kontinuum

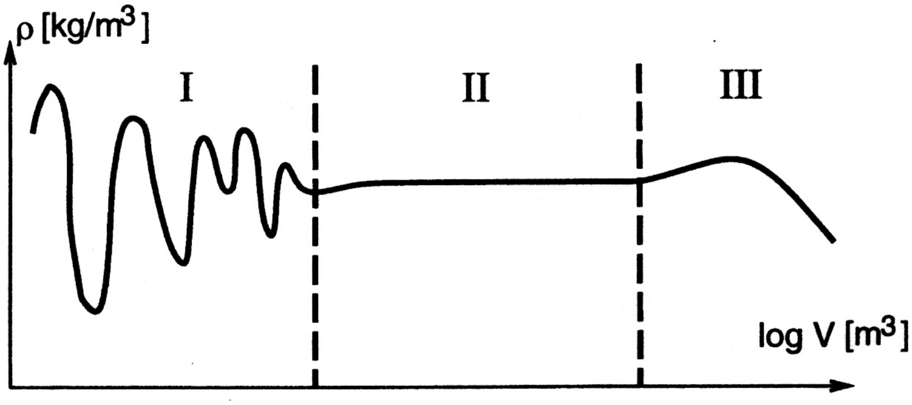
Matematická definice kontinua:

1. **Matematické funkce popisující kontinuum jsou spojité včetně svých derivací**
2. **Připouští se konečný počet ploch, kde podmínka 1. neplatí**

Kontinuum představuje spojité prostředí, kde jsou všechny veličiny definovány pro nekonečně malý bod.

Kontinuum

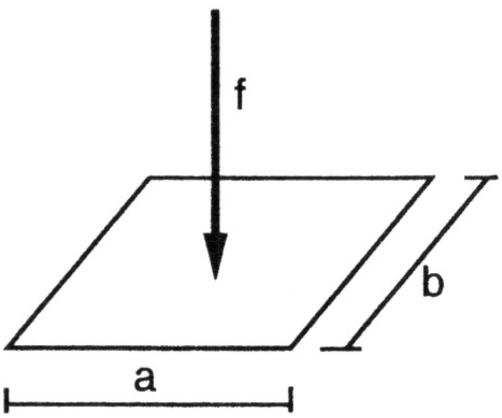
Průběh měřené veličiny v závislosti na měřítku:



Napětí

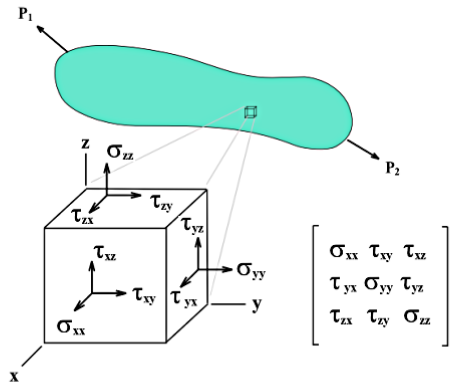
Pojem napětí zavedl Cauchy v roce 1793. Definoval jej jako sílu působící na danou plochu:

$$\sigma = \frac{f}{ab}$$



Napětí

Popis napjatosti je v kontinuu složitější, definujeme normálové a smykové složky:

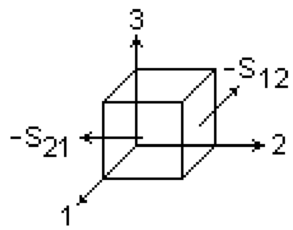


Je zřejmé, že diagonální složky tenzoru napětí (T_{11}, T_{22}, T_{33}) jsou kolmé na infinitezimální krychli kontinua, nazýváme je proto napětí *normálová* (někdy značíme σ). Ostatní složky se nazývají napětí *smyková* (někdy značíme τ).

Napětí

- Pokud v bodě kontinua nepůsobí další síly či momenty (momenty mohou působit v tzv. polárním kontinuu) a *bod je v rovnovážné poloze*, tenzor napětí je symetrický, tzn.

$$T_{ij} = T_{ji}$$



Symmetry of the Stress Tensor

- Pro každý tenzor napětí lze pootočit soustavu souřadnic tak, aby smyková napětí (T_{ij} pro $i \neq j$) byla rovná nule. Nenulové diagonální členy se pak nazývají *hlavní* napětí. **Hlavní napětí jsou vlastní čísla tenzoru napětí**.

Napětí
Znaménková konvence

Komplikaci v orientaci v geotechnických výpočtech často přinášejí dvě různé *znaménkové konvence*.

- V *mechanice kontinuua* je zaběhnutá znaménková konvence jež označuje tahová napětí a přetvoření jako kladná, tlaková jako záporná.
- Tato konvence má za následek že výpočty geotechnických úloh jsou méně přehledné, neboť v geotechnice ve většině případů figurují tlaková napětí. Proto *mechanika zemin* většinou uvažuje tlaková napětí jako pozitivní.

My budeme většinou uvažovat znaménkovou konvenci *mechaniky kontinuua*.

Napětí
Invarianty napětí

Pro popis stavu napjatosti často využíváme invarianty napětí, jejichž hodnota je nezávislá na souřadném systému.

- Střední napětí p je modifikovaným prvním invariantem napětí:

$$p = -\frac{I_1}{3} = -\frac{\mathrm{tr}\mathbf{T}}{3}$$

- "Deviátorové" napětí q je modifikovaný druhý invariant deviátoru napětí:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\operatorname{dev}\mathbf{T}\|$$

Napětí
Invarianty napětí

Pro axisymetrický stav s diagonálním tenzorem napětí (např. pro běžnou triaxiální zkoušku):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_a & 0 & 0 \\ 0 & T_r & 0 \\ 0 & 0 & T_r \end{bmatrix}$$

se vztahy pro výpočet invariantů redukují na

$$p = -\frac{T_a + 2T_r}{3}$$

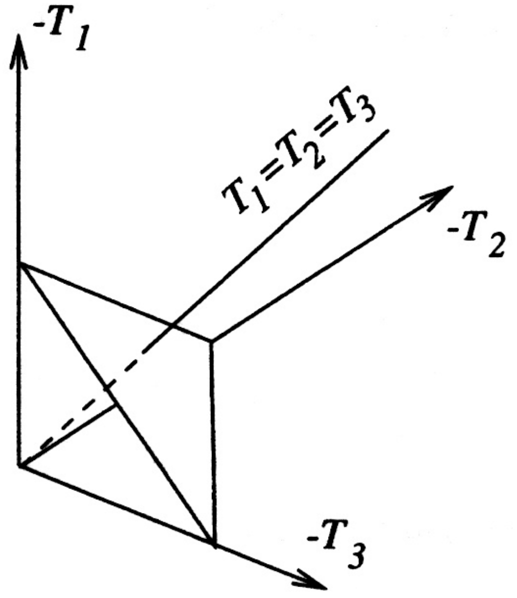
$$q = |T_a - T_r|$$

- Často se však pro triaxiální stav uvažuje $q = T_a - T_r$
- Pro definici třetího používaného invariantu napětí si musíme vysvětlit pojem *deviátorová rovina*.

Napětí
Invarianty napětí

Deviátorová rovina je určena podmínkou

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T_3$$

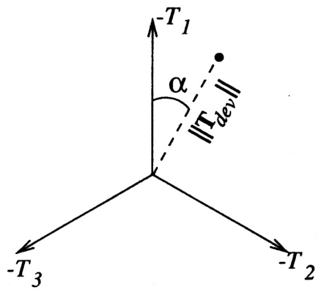


Napětí

Invarianty napětí

- V deviátorové rovině je *konstantní* první invariant napětí (střední napětí *p*). Je proto vhodná pro zobrazení stavu napjatosti s proměnným druhým a třetím invariantem napětí.
- Jako třetí invariant napětí se většinou uvažuje *Lodeho úhel* α

$$\cos 3\alpha = -\frac{J_3}{2}\left(\frac{3}{J_2}\right)^{3/2}$$

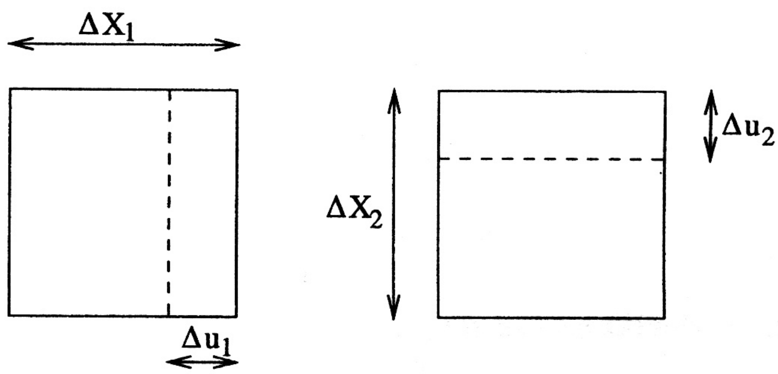


Přetvoření

- Přetvořením se označuje změna délky vztažená k původní délce. Následující výpočty jsou přesně platné pouze pro *infinitezimální* (nekonečně malá) přetvoření. Velká přetvoření jsou mimo náplň tohoto kurzu.
- Jednoosé přetvoření:

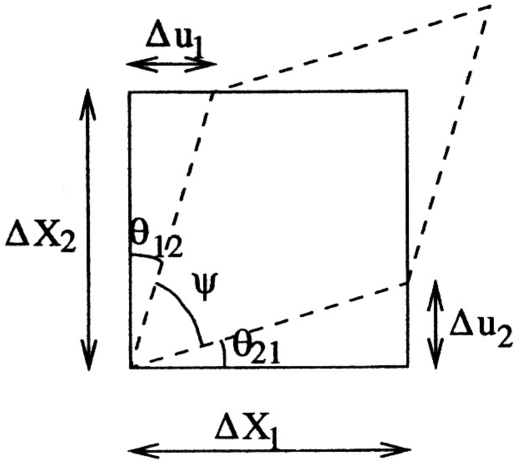
$$\epsilon_{11} \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta X_1}$$

$$\epsilon_{22} \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta X_2}$$



Přetvoření

Pro čistý smyk jenž můžeme znázornit:



definujeme úhlové přetvoření γ_{12} jako

$$\gamma_{12} = 90^\circ - \psi = \theta_{12} + \theta_{21} \approx \tan\theta_{12} + \tan\theta_{21} = \frac{\Delta u_1}{\Delta X_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta X_1}$$

Přetvoření

Invarianty přetvoření

Pro přetvoření využíváme následující invarianty:

- Objemové přetvoření ϵ_V

$$\epsilon_V = \mathrm{tr}(\epsilon)$$

- Smykové přetvoření ϵ_s

$$\epsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \| \mathrm{dev}(\epsilon) \|$$

Přetvoření

Invarianty přetvoření

- Pro axisymetrický stav s diagonálním tenzorem přetvoření (např. pro běžnou triaxiální zkoušku):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_r \end{bmatrix}$$

  se vztahy pro výpočet invariantů redukují na

$$\epsilon_v = \epsilon_a + 2\epsilon_r$$

$$\epsilon_s = \frac{2}{3}|\epsilon_a - \epsilon_r|$$

- Pro triaxiální zkoušku se často uvažuje $\epsilon_s = 2/3(\epsilon_a - \epsilon_r)$.
- Dále lze ukázat, že pro *nedrénovanou* triaxiální zkoušku platí $\epsilon_s = \epsilon_a$ (a samozřejmě $\epsilon_v = 0$).